

Δευτέρα, 20 Μαΐου 2013

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό σελ. 28

A2. Σχολικό σελ. 14

A3. Σχολικό σελ. 87

A4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Λ.

ΘΕΜΑ Β

$$P(\omega_1) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x^3 + x^2} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + x + 1} + 1)}{x^2 + 1(\sqrt{x^2 + x + 1} + 1)} =$$

$$B1. = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + 1 - 1}{x^2 + 1(\sqrt{x^2 + x + 1} + 1)} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^2 + 1(\sqrt{x^2 + x + 1} + 1)} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{(-1 + 1\sqrt{1 + 1 + 1})} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-1 + 2} = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{4}$$

Άρα $P(\omega_1) = 1/4$

$$P(\omega_3) = f'(1) \quad f'(x) = \left(\frac{x}{3} \ln x\right)' = \left(\frac{x}{3}\right)' \ln x + \frac{x}{3} (\ln x)' = \frac{1}{3} \ln x + \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{\ln x}{3} + \frac{1}{3} = \frac{\ln x + 1}{3}$$

Άρα $P(\omega_3) = \frac{\ln 1 + 1}{3} = \frac{0 + 1}{3} = \frac{1}{3}$

B2. 1^{ος} Τρόπος

$$\frac{1}{3} \leq P(A') \leq \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{3} \leq 1 - P(A) \leq \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq P(A) \leq \frac{2}{3}$$

$$A \cap B = \omega_1 \text{ άρα } A \cap B \subseteq A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(\omega_1) = \omega_3 \text{ επομένως } (B - A)' = \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$$

$$A \subseteq B - A \Rightarrow P(A) \leq P(B - A) \Rightarrow P(A) \leq 1 - P(B - A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A) \leq 1 - P(\omega_3) \Rightarrow P(A) \leq \frac{2}{3}$$

2^{ος} Τρόπος

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + P(\omega_2) + P(\omega_3) = 1$$

$$P(\omega_2) + P(\omega_3) = \frac{5}{12}$$

$$P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_4) = \frac{1}{4} + P(\omega_4)$$

$$P(B) = P(\omega_1) + P(\omega_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

$$A \cap B = \omega_1 \Rightarrow P(A \cap B) = P(\omega_1) = \frac{1}{4}$$

$$A \cap B \subseteq A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A)$$

$$\frac{1}{4} \leq P(A)$$

$$-\frac{1}{4} \geq -P(A)$$

$$1 - \frac{1}{4} \geq 1 - P(A)$$

$$\frac{3}{4} \geq P(A')$$

$$B - A \subseteq A'$$

$$P(B - A) \leq P(A')$$

$$P(\omega_3) \leq P(A')$$

$$\frac{1}{3} \leq P(A')$$

$$\text{B3. Αν } P(A') = \frac{3}{4} \Rightarrow P(\omega_2) + P(\omega_3) = \frac{3}{4} \Rightarrow P(\omega_2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} \Rightarrow P(\omega_2) = \frac{5}{12}$$

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1$$

$$P(\omega_4) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{5}{12} \Rightarrow P(\omega_4) = 0$$

$$P(A - B \cup B - A) = P(A - B) + P(B - A) = P(\omega_4) + P(\omega_3) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(A' - B') = P(\omega_3) = \frac{1}{3}$$

αφού $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$

$B' = \{\omega_2, \omega_4\}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Κλάσεις

$[50, 50+c)$

$[50+c, 50+2c)$

$[50+2c, 50+3c)$

$[50+3c, 50+4c)$

$$x_4 = 85 \Rightarrow \frac{50 + 3c + 50 + 4c}{2} = 85 \Rightarrow 100 + 7c = 170 \Rightarrow c = 10$$

Γ2.

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Σχετική συχνότητα f_i
$[50, 60)$	55	0,1
$[60, 70)$	65	0,3
$[70, 80)$	75	0,2
$[80, 90)$	85	0,4
Σύνολο		1

$$f_4 = 2f_3$$

$$f_1 + f_2 + \frac{1}{2}f_3 = 0,5 \quad \text{αφού } \delta = 75$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^4 x_i f_i \Rightarrow 74 = 55f_1 + 65f_2 + 75f_3 + 85f_4 \Rightarrow 55f_1 + 65f_2 + 75f_3 + 85f_4 = 74$$

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$$

$$\Rightarrow 0,5 - \frac{1}{2}f_3 + f_3 + 2f_3 = 1 \Rightarrow \frac{5}{2}f_3 = 0,5 \Rightarrow$$

$$f_3 = 0,2$$

$$f_4 = 2f_3 \Rightarrow f_4 = 2 \cdot 0,2 \Rightarrow$$

$$f_4 = 0,4$$

$$f_1 + f_2 + \frac{1}{2}0,2 = 0,5 \Rightarrow f_1 + f_2 = 0,4 \Rightarrow$$

$$f_1 = 0,4 - f_2$$

$$55 \cdot 0,4 - f_2 + 65f_2 + 75 \cdot 0,2 + 85 \cdot 0,4 = 74 \Rightarrow 22 - 55f_2 + 65f_2 + 15 + 34 = 74 \Rightarrow 10f_2 = 3 \Rightarrow$$

$$f_2 = 0,3$$

$$f_1 = 0,4 - 0,3 \Rightarrow$$

$$f_1 = 0,1$$

Γ3. Το πλήθος του δείγματος είναι n

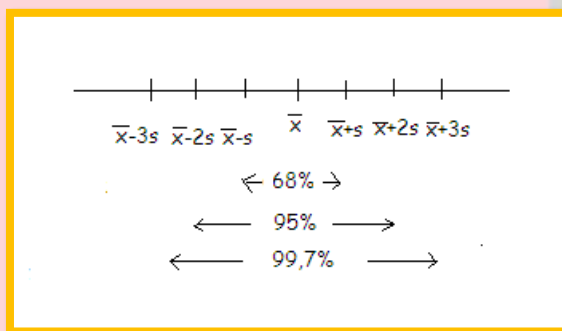
$$v_1 = f_1 n = 0,1n$$

Άρα $v_2 = f_2 n = 0,3n$

$$v_3 = f_3 n = 0,2n$$

$$\bar{x}' = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i \cdot v_i}{0,6n} = \frac{55 \cdot 0,1n + 65 \cdot 0,3 \cdot n + 75 \cdot 0,2n}{0,6n} = \frac{5,5 + 19,5 + 15}{0,6} = \frac{40}{0,6} = \frac{200}{3}$$

Γ4.



$$\left. \begin{array}{l} \bar{x} + 2s = 74 \\ \bar{x} - s = 68 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 68 + s + 25 = 74 \\ \bar{x} = 68 + s \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 3s = 6 \Rightarrow s = 2 \\ \bar{x} = 68 + 2 \Rightarrow \bar{x} = 70 \end{array}$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35} < \frac{1}{10} \text{ άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$f(x) = x \ln x + \kappa, x > 0 \kappa \in \mathbb{Z} \text{ με } \kappa > 1$$

$$f'(x) = \ln x + 1, x > 0$$

$$\varepsilon : y - f(1) = f'(1) \cdot 1 - 1 \Leftrightarrow y - \kappa = 1 - 1 \Leftrightarrow y = x - 1 + \kappa$$

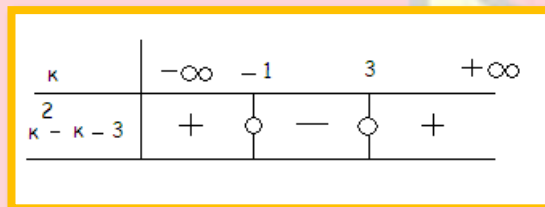
Για $x = 0 \Rightarrow y = \kappa - 1$ άρα η ε τέμνει τον y' στο $B(0, \kappa - 1)$

Για $y = 0 \Rightarrow 0 = x - 1 + \kappa \Leftrightarrow x = \kappa - 1$ άρα η ε τέμνει τον x' στο $A(\kappa - 1, 0)$

$$E_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} |x_A| |y_B| = \frac{1}{2} |x_A \cdot y_B| = \frac{1}{2} |(\kappa - 1) \cdot (\kappa - 1)| = \frac{1}{2} (\kappa - 1)^2 \tau.μ.$$

$$\text{Είναι } E < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} (\kappa - 1)^2 < 2 \Leftrightarrow (\kappa - 1)^2 < 4 \Leftrightarrow \kappa^2 - 2\kappa + 1 - 4 < 0$$

Ρίζες του $\kappa^2 - 2\kappa - 3$ είναι οι αριθμοί -1 και 3



Η (2) αληθεύει όταν $\kappa \in (-1, 3)$.

Επειδή $\kappa \in \mathbb{Z}$ με $\kappa > 1$ είναι $\kappa = 2$ άρα $f(x) = x \ln x + 2, x > 0$.

Δ2.

Για $\kappa = 2$ είναι $\varepsilon : y = x - 1 + \kappa \Leftrightarrow y = x - 1 + 2 \Leftrightarrow y = x + 1$

$$\text{α) Είναι } \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_{50}}{50} = 31 \Leftrightarrow \frac{x_1 + 1 + x_2 + 1 + \dots + x_{50} + 1}{50} + 1 = 31$$

$$\bar{x} + 1 = 31 \Leftrightarrow \bar{x} = 30$$

β) Είναι

$$\frac{x_1 + 3 + \dots + x_{20} + 3 + x_{21} + \dots + x_{35} + x_{36} - \lambda + \dots + x_{50} - \lambda}{50} = 31 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x_1 + \dots + x_{20} + x_{21} + \dots + x_{35} + x_{36} + \dots + x_{50} + 3 \cdot 20 - 15\lambda}{50} = 31 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x_1 + \dots + x_{50}}{50} + \frac{60 - 15\lambda}{50} = 31 \Leftrightarrow \bar{x} + \frac{60 - 15\lambda}{50} = 31 \Leftrightarrow 30 + \frac{60 - 15\lambda}{50} = 31 \Leftrightarrow \frac{60 - 15\lambda}{50} = 1 \Leftrightarrow 60 - 15\lambda = 50 \Leftrightarrow$$

$$-15\lambda = -10 \Leftrightarrow \lambda = \frac{10}{15} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{2}{3}$$

Δ3.

$$f(x) = x \ln x + 2$$

$$f'(x) = \ln x + 1$$

Πρόσημο f' $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-1} \Leftrightarrow x > e^{-1} \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$

Άρα $f(x) \uparrow$ στο $[\frac{1}{e}, +\infty)$

Επειδή $\begin{cases} \frac{1}{e} < a < \beta < \gamma < e \\ f \uparrow \text{ στο } [\frac{1}{e}, +\infty) \end{cases}$ είναι $\begin{cases} f(\frac{1}{e}) < f(a) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e) \\ 2\frac{1}{e} < f(a) < f(\beta) < f(\gamma) < e+2 \end{cases}$

Επιπλέον $f'(\frac{1}{e}) = 0$

Άρα είναι

$$f'(\frac{1}{e}) < f'(\frac{1}{e}) < f(a) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e) \text{ δηλαδή } 0 < 2 - \frac{1}{e} < f(a) < f(\beta) < f(\gamma) < e+2$$

Επομένως είναι $R = f(e) - f'(\frac{1}{e}) = e+2 - 0 = e+2$

$$a^a \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma = e^7 \Leftrightarrow \ln(a^a \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma) = \ln e^7 \Leftrightarrow$$

Είναι $\ln a^a + \ln \beta^\beta + \ln \gamma^\gamma = 7 \Leftrightarrow \alpha \ln a + \beta \ln \beta + \gamma \ln \gamma = 7 \Leftrightarrow$

$$\alpha \ln a + 2 + \beta \ln \beta + 2 + \gamma \ln \gamma + 2 = 7 + 6 \Leftrightarrow$$

$$f(a) + f(\beta) + f(\gamma) = 13$$

Η μέση τιμή είναι $\frac{f(a) + f(\beta) + f(\gamma) + f(e) + f'(\frac{1}{e})}{5} = \frac{13 + e + 2 + 0}{5} = \frac{15 + e}{5} = 3 + \frac{e}{5}$.

Δ4. Επειδή η εφαπτομένη (ε) στο σημείο $(t, f(t))$ σχηματίζει οξεία γωνία με τον $x'x$ είναι $\lambda_\varepsilon > 0$ δηλαδή $f'(t) > 0$ άρα $\ln t + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln t > -1 \Leftrightarrow \ln t > \ln e^{-1} \Leftrightarrow t > e^{-1} \Leftrightarrow t > \frac{1}{e}$

άρα $A = \{t_{11}, \dots, t_{30}\}$

$$f(t) > f'(t) + 1 \Leftrightarrow t \ln t + 2 > \ln t + 2 \Leftrightarrow t \ln t - \ln t > 0 \quad (3)$$

$$\ln t(t-1) > 0$$

Επειδή όλες οι τιμές των t_1 έως t_{29} είναι μικρότερες του 1 είναι $\ln t_1$ έως $\ln t_{29} < 0$.

Επίσης t_1 έως $t_{29} < 1$

Άρα η 3 ισχύει για τις τιμές t_1 έως και t_{29} .

Επομένως $B = \{t_1, \dots, t_{29}\}$

$$\alpha) P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \quad \beta) A \cap B = \{t_1, \dots, t_{29}\} \text{ άρα } P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{19}{30}.$$

ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ:

ΒΕΡΓΙΟΠΟΥΛΟΣ Γ.

ΒΕΡΓΙΟΠΟΥΛΟΥ Μ.

ΚΟΛΛΙΟΠΟΥΛΟΣ Π.

ΓΙΑ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΒΕΡΓΙΟΠΟΥΛΟΣ

