

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β') ΤΕΤΑΡΤΗ 23
ΜΑΪΟΥ 2012

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ :
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

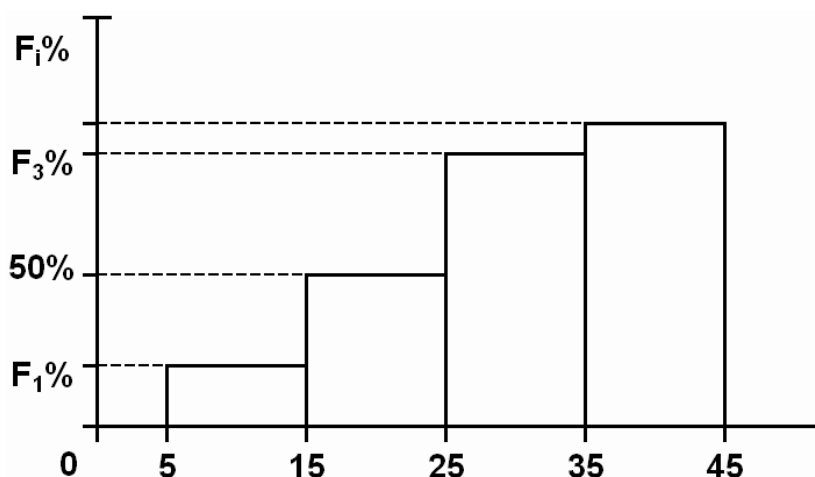
- A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$
Μονάδες 7
- A2. Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A
Μονάδες 4
- A3. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής X , αν $\bar{x} > 0$ και πώς, αν $\bar{x} < 0$;
Μονάδες 4
- A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση ποσοτικών δεδομένων (μονάδες 2).

- β) Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y=f(x)$ ως προς x , όταν $x=x_0$ (μονάδες 2).
- γ) Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, τότε ισχύει ότι $P(A) > P(B)$ (μονάδες 2).
- δ) Το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των τιμών μιας μεταβλητής είναι μέτρα διασποράς (μονάδες 2).
- ε) $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0, x_0 \in \mathfrak{R}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα $[5, 45)$ και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.



- B1. Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

Μονάδες 4

B2. Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι $\alpha=8$ (μονάδες 3) και να μεταφέρετε τον πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιό σας (μονάδες 5).

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
$[5, \cdot)$		$\alpha+4$			
$[\cdot, \cdot)$		$3\alpha-6$			
$[\cdot, \cdot)$		$2\alpha+8$			
$[\cdot, 45)$		$\alpha-2$			
Σύνολο					

Μονάδες 8

B3. Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{x}$ και η τυπική απόκλιση s των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{84} \approx 9,17$)

Μονάδες 8

B4. Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Από τους μαθητές μιας τάξης ενός σχολείου επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Αν n φυσικός αριθμός με $n \geq 3$, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει

- Γαλλικά είναι $\frac{3n}{n^2+1}$
- Ισπανικά είναι $\frac{n+2}{n^2+1}$
- και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι $\frac{n+1}{n^2+1}$

- μία τουλάχιστον από τις παραπάνω γλώσσες είναι ίση με το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις παραπάνω δύο γλώσσες είναι βέβαιο.

Μονάδες 7

Γ2. Να αποδείξετε ότι $v=3$

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες.

Μονάδες 6

Γ4. Αν ο αριθμός των μαθητών που μαθαίνουν και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι 32, να βρείτε τον αριθμό των μαθητών της τάξης.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1+\ln^2 x}{x}$, $x>0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 5

Δ2. Έστω $M(x, f(x))$, $x>0$ σημείο της γραφικής παράστασης της f . Η παράλληλη ευθεία από το M προς τον άξονα $y'y$ τέμνει τον ημιάξονα Ox στο σημείο $K(x,0)$ και η παράλληλη ευθεία από το M προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο $\Lambda(0, f(x))$. Αν O είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου $OKM\Lambda$ γίνεται ελάχιστο, όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

Μονάδες 7

Δ3. Έστω η ευθεία $\epsilon: y = \lambda x + \beta$, $\beta \neq 10$, η οποία είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\Sigma(1, f(1))$. Θεωρούμε δέκα σημεία (x_i, y_i) , $i=1, 2, \dots, 10$ της ευθείας ϵ , τέτοια ώστε οι τετμημένες τους x_i να έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 10$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$. Να βρείτε για ποιες τιμές του β το δείγμα των τεταγμένων y_i των δέκα σημείων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 8

Δ4. Αν A και B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, τέτοια ώστε $A \neq \emptyset$ και $A \cap B \neq \emptyset$, τότε να αποδείξετε ότι

$$f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2012
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελ.31

A2. $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$

A3. Αν $\bar{x} > 0$ τότε $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{s}{\bar{x}}$

Αν $\bar{x} < 0$ τότε $CV = \frac{s}{-\bar{x}} = -\frac{s}{\bar{x}}$

- A4.** α) Λ
 β) Σ
 γ) Λ
 δ) Σ
 ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. $\delta=25$

B2. $F_2 = \frac{N_2}{v}$ Είναι $F_2\%=50\%$, $N_2= 4\alpha-2$, $v= 7\alpha+4$ άρα

$$\frac{50}{100} = \frac{4\alpha-2}{7\alpha+4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{4\alpha-2}{7\alpha+4} \Leftrightarrow 8\alpha-4 = 7\alpha+4 \Leftrightarrow \alpha=8$$

Ο πίνακας γίνεται:

Χρόνοι σε λεπτά	x_i	v_i	$f_i\%$	$N_i\%$	$F_i\%$
[5,15)	10	12	20	12	20
[15,25)	20	18	30	30	50
[25,35)	30	24	40	54	90
[35,45)	40	6	10	60	100
Σύνολο		60	100		

B3. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^v v_i x_i}{v} = \frac{120 + 360 + 720 + 240}{60} = 24$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i}{v} = 84 \quad \text{άρα } s = \sqrt{84} \cong 9,17$$

B4. Από 37 λεπτά και πάνω δηλ. μέχρι 45 λεπτά υπάρχουν 8 λεπτά, άρα το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά είναι $\frac{8}{10} \cdot f_4\% = \frac{8}{10} \cdot 10\% = 8\%$

ΘΕΜΑ Γ

$$P(\Gamma) = \frac{3\nu}{\nu^2 + 1}, P(I) = \frac{\nu + 2}{\nu^2 + 1}, P(\Gamma \cap I) = \frac{\nu + 1}{\nu^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2 + 3} - 2)}{x^2 + x} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 \cdot [(x^2 + 3) - 4]}{x \cdot (x + 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x^2 - 1)}{x \cdot (x + 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x - 1)(x + 1)}{x \cdot (x + 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x - 1)}{x \cdot (\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \frac{2 \cdot (-2)}{-1 \cdot (\sqrt{4} + 2)} = \frac{-4}{-4} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } P(\Gamma \cup I) = 1$$

Γ1. Είναι $P(\Gamma \cup I) = 1$ άρα είναι βέβαιο το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις 2 γλώσσες.

$$\textbf{Γ2. } P(\Gamma \cup I) = P(\Gamma) + P(I) - P(\Gamma \cap I)$$

$$1 = \frac{3\nu}{\nu^2 + 1} + \frac{\nu + 2}{\nu^2 + 1} - \frac{\nu + 1}{\nu^2 + 1} \Leftrightarrow 1 = \frac{3\nu + 1}{\nu^2 + 1} \Leftrightarrow \nu^2 + 1 = 3\nu + 1 \Leftrightarrow \nu^2 - 3\nu = 0 \Leftrightarrow \nu(\nu - 3) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \nu = 0 \text{ απορρίπτεται} \\ \nu = 3 \end{matrix}$$

$$P[(\Gamma - I) \cup (I - \Gamma)] = P(\Gamma - I) + P(I - \Gamma) = P(\Gamma) - P(\Gamma \cap I) + P(I) - P(\Gamma \cap I) =$$

$$\textbf{Γ3. } = \frac{9}{10} - \frac{4}{10} + \frac{5}{10} - \frac{4}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\textbf{Γ4. } P(\Gamma \cap I) = \frac{N(\Gamma \cap I)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{4}{10} = \frac{32}{N(\Omega)} \Leftrightarrow N(\Omega) = 80$$

ΘΕΜΑ Δ

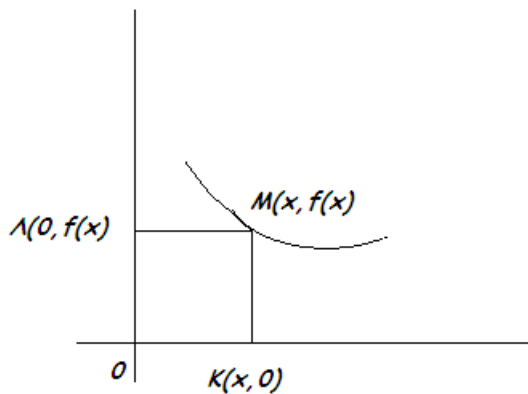
Δ1.

$$f(x) = \frac{1 + \ln^2 x}{x}, x > 0$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1 + \ln^2 x)' \cdot x - (1 + \ln^2 x)(x)'}{x^2} = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - 1 - \ln^2 x}{x^2} = \frac{2 \ln x - \ln^2 x - 1}{x^2} = \frac{-(\ln^2 x - 2 \ln x + 1)}{x^2} = \\ &= \frac{-(\ln x - 1)^2}{x^2} \leq 0 \end{aligned}$$

Άρα f γνησίως φθίνουσα

Δ2.



$$E_{OKML} = (OK)(OL) = |x| \cdot |f(x)| = x \cdot f(x) = x \cdot \frac{1 + \ln^2 x}{x} = 1 + \ln^2 x$$

$$h(x) = 1 + \ln^2 x, x > 0$$

Έστω

$$h'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}, x > 0$$

Πρόσημο $h'(x)$ $h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 \ln x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq \ln 1 \Leftrightarrow x \geq 1$

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	$\diagup \diagdown$	$-$	$+$
$h(x)$	$\diagup \diagdown$	$\searrow$	$\nearrow$

$h(1) = 1 + \ln^2 1 = 1$ Για $x=1$ είναι $f(1) = \frac{1 + \ln^2 1}{1} = \frac{1+0}{1} = 1$, δηλ. $(OK)=(OL)$ άρα το $OKML$ είναι τετράγωνο.

Δ3.

$\lambda = f'(1) = -1$ άρα $\varepsilon: y = -x + \beta$. Είναι $\bar{y} = -\bar{x} + \beta$
 $S_y = S_x$

$$C_v = \frac{S_y}{\left| \begin{matrix} - \\ y \end{matrix} \right|} = \frac{S_x}{\left| \begin{matrix} - \\ -x + \beta \end{matrix} \right|} = \frac{2}{|-10 + \beta|} = \frac{2}{|\beta - 10|}$$

Για να είναι το δείγμα ομοιογενές πρέπει $C_v \leq 10\%$, δηλ. $\frac{2}{|\beta - 10|} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow |\beta - 10| \geq 20 \Leftrightarrow$

$$\begin{array}{ccc} \beta - 10 \leq -20 & & \beta \leq 10 \\ \Leftrightarrow \quad \dot{\eta} & & \Leftrightarrow \quad \dot{\eta} \\ \beta - 10 \geq 20 & & \beta \geq 30 \end{array}$$

Δ4.

$$A \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A) \leq P(A \cup B) \xRightarrow{f \downarrow} f(P(A)) \geq f(P(A \cup B)) \quad \textbf{(1)}$$

$$A \cap B \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A \cup B) \xRightarrow{f \downarrow} f(P(A \cap B)) \geq f(P(A \cup B)) \quad \textbf{(2)}$$

$$\textbf{(1)+(2)} \Rightarrow f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2 f(P(A \cup B)) .$$