

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2012
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f η οπού είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$;

Μονάδες 4

A3. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα

β) Μια συνάρτηση f είναι 1 – 1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x

γ) Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

δ) $(\sin x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x | \sin x = 0\}$

ε) $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b + \int_a^b f'(x)g(x)dx$, όπου f' , g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 4 \quad (1)$$

$$|w - 5\bar{w}| = 12 \quad (2)$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$.

Μονάδες 6

B2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ τότε να βρείτε το $|z_1 + z_2|$.

Μονάδες 7

B3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

Μονάδες 6

B4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι: $1 \leq |z - w| \leq 4$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x - 1$, $x > 0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2[1,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$, $x > 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Μονάδες 6

Γ3. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) + f(x_0) = 2012$.

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 1$ με $x > 0$, τον άξονα $x'x$ κι την ευθεία $x = e$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x > 0$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$
- $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$
- $\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e\right) \cdot |f(x)|$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 10

Αν είναι $f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$, $x > 0$, τότε:

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(f(x))^2 \ln \frac{1}{f(x)} - f(x) \right]$.

Μονάδες 5

Δ3. Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln x \leq x-1$ που ισχύει για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x > 0$, όπου $a > 0$, είναι κυρτή (μονάδες 2). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$F(x) + F(3x) > 2F(2x)$, για κάθε $x > 0$ (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Δ4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε: $F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$.

Μονάδες 4

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. θεώρημα σελ 253 σχολ βιβλίο

A2. όταν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $[a, \beta]$

A3. όταν $\forall x \in A$ ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$

A4. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

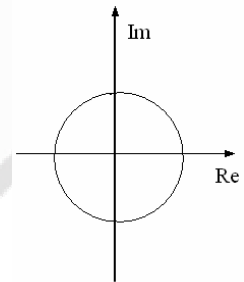
B1. $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) + (z+1)(\bar{z}+1) = 4$

$\bar{z}\bar{z} - z - \bar{z} + 1 + z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 = 4 \Leftrightarrow 2z\bar{z} = 4 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

B2.

• $|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = 2 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 2 \Leftrightarrow$
 $z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = 2 \Leftrightarrow |z_1|^2 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2 = 2 \Leftrightarrow$
 $-z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 = 0 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 = -\bar{z}_1z_2$

• $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 =$
 $2 + z_2\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_1 = 2 \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{2}$



B3. $|w - 5\bar{w}| = 12 \Leftrightarrow (w - 5\bar{w})(\bar{w} - 5w) = 144 \Leftrightarrow w\bar{w} - 5w^2 - 5\bar{w}^2 + 25w\bar{w} = 144 \Leftrightarrow$

$26w\bar{w} - 5(w^2 + \bar{w}^2) = 144$

$26x^2 + 26y^2 - 5(x^2 - y^2 + 2xyi + x^2 - y^2 - 2xyi) = 144 \Leftrightarrow$

$26x^2 + 26y^2 - 10x^2 + 10y^2 = 144 \Leftrightarrow 16x^2 + 36y^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

$\alpha = 3 \quad \beta = 2$

$|w|_{\min} = \beta = 2 \quad |w|_{\max} = \alpha = 3$

B4. $(|z| - |w|) \leq |z - w| \leq |z| + |w| \Leftrightarrow ||w| - |z|| \leq |z - w| \leq |z| + |w|$

$||w|_{\min} - |z|| \leq |z - w| \leq |z| + |w|_{\max}$

$|2 - 1| \leq |z - w| \leq 1 + 3$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x) = (x-1) \cdot \ln x - 1, x > 0$

$f'(x) = (x-1)' \cdot \ln x + (x-1) \cdot (\ln x)' = \ln x + (x-1) \cdot \frac{1}{x} \quad (1)$

προφανής ρίζα της $f'(x)$ είναι το $x=1$

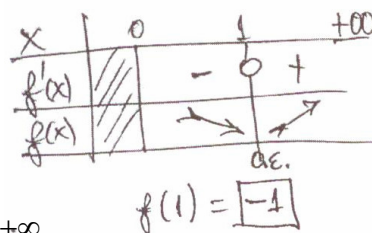
μονοτονία $f' \quad f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{x - (x-1)}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \forall x > 0$ άρα $f' \uparrow$ στο $(0, +\infty)$

πρόσημο f'

• $\forall x \in (0, 1)$ είναι $x < 1 \xrightarrow{f' \uparrow} f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$ άρα $f \downarrow$ στο $(0, 1]$

• $\forall x \in (1, +\infty)$ είναι $x > 1 \xrightarrow{f' \uparrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$ άρα $f \uparrow$ στο $[1, +\infty)$

$$f(1) = -1$$



- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x-1) \cdot \ln x - 1] = (-1) \cdot (+\infty) - 1 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1) \cdot \ln x - 1] = (+\infty) \cdot (+\infty) - 1 = +\infty$

$$\text{άρα } f(A) = [-1, +\infty)$$

$$\Gamma 2. x^{x-1} = e^{2013} \Leftrightarrow \ln x^{x-1} = \ln e^{2013} \Leftrightarrow (x-1) \cdot \ln x = 2013 \Leftrightarrow (x-1) \cdot \ln x = 1 + 2012 \Leftrightarrow (x-1) \cdot \ln x - 1 = 2012 \Leftrightarrow f(x) = 2012$$

έστω $A_1 = (0, 1]$ τότε $f(A_1) = [-1, +\infty)$ επειδή $2012 \in f(A_1)$ υπάρχει $x_1 \in (0, 1) : f(x_1) = 2012$ επειδή $f \downarrow$ στο A_1 το x_1 είναι μοναδικό

Έστω $A_2 = [1, +\infty)$ τότε $f(A_2) = [-1, +\infty)$. Επειδή $2012 \in f(A_2)$ υπάρχει $x_2 \in (1, +\infty) : f(x_2) = 2012$ επειδή $f \uparrow$ στο A_2 το x_2 είναι μοναδικό

Άρα η εξίσωση $f(x) = 2012$ έχει 2 ακριβώς θετικές ρίζες $x_1 < 1 < x_2$

$\Gamma 3.$ Αρκεί ν.δ.ο. έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (x_1, x_2) η εξίσωση

$$f'(x) + f(x) = 2012 \Leftrightarrow f'(x)e^x + f(x) \cdot e^x = 2012 \cdot e^x \Leftrightarrow [f(x) \cdot e^x]' = [2012e^x] \Leftrightarrow [f(x) \cdot e^x - 2012e^x]' = 0 \Leftrightarrow [e^x \cdot (f(x) - 2012)]' = 0$$

$$\text{έστω } f(x) = e^x \cdot [f(x) - 2012]$$

- η $h(x)$ ως γινόμενο συνεχών είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$
- η $h(x)$ ως γινόμενο παραγώγων είναι παραρ. Στο (x_1, x_2)
- $$\left. \begin{aligned} h(x_1) &= e^{x_1} \cdot [f(x_1) - 2012] = e^{x_1} \cdot 0 = 0 \\ h(x_2) &= e^{x_2} \cdot [f(x_2) - 2012] = e^{x_2} \cdot 0 = 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow h(x_1) = h(x_2)$$

από Θ. Rolle $\exists x_0 \in (x_1, x_2) C(0, +\infty) : h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$f'(x_0)e^{x_0} + f(x_0)e^{x_0} = 2012e^{x_0} \Leftrightarrow f'(x_0) + f(x_0) = 2012$$

$$\Gamma 4. \text{είναι } g(x) = f(x) + 1 \geq 0 \quad \forall x > 0$$

Ρίζα της $g(x)$ το $x = -1$

$$E = \int_1^e |g(x)| dx = \int_1^e g(x) dx = \int_1^e [f(x) + 1] dx = \int_1^e (x-1) \cdot \ln x dx =$$

$$= \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x \right)' \ln x dx = \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \cdot \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$\left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \cdot \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right) dx = \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \cdot \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e + [x]_1^e =$$

$$\left(\frac{e^2}{2} - e \right) \cdot \ln e - 0 - \frac{1}{4} \cdot (e^2 - 1) + e - 1 = \frac{e^2}{2} - e - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} + e - 1 =$$

$$\frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{e^2 - 3}{4} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Η ισότητα $\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e\right) \cdot |f(x)|$

$$\text{Γίνεται } \ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e\right) \cdot f(x) \quad (2) \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln x - x}{\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e}$$

Η $f(x)$ ως πηλίκο παραγωγισίμων είναι παραγωγίσμη.

$$\text{Από (2) είναι } \frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \Rightarrow \left[\frac{\ln x - x}{f(x)}\right]' = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e\right)' \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{\ln x - x}{f(x)}\right]' = \frac{\ln x - x}{f(x)} \text{ άρα } \frac{\ln x - x}{f(x)} = c \cdot e^x \quad (3)$$

$$\text{Για } x=1 \Rightarrow \frac{\ln 1 - 1}{f(1)} = c \cdot e^{+1} \Leftrightarrow \frac{f(1)=-1}{-1} = c \cdot e \Leftrightarrow e = c \cdot e \Leftrightarrow c = 1$$

$$\text{Για } c=1 \Rightarrow \frac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow f(x) \cdot e^x = \ln x - x \Leftrightarrow f(x) = e^{-x} \cdot (\ln x - x)$$

$$\Delta 2. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - x}{e^x} = \frac{-\infty - 0}{1} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu \frac{1}{f(x)} = \eta\mu 0 = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [f^2(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[f^2(x) \cdot \left(\eta\mu \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)} \left(\frac{0}{0} \right)}{\frac{1}{f^2(x)}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left[\eta\mu \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)} \right]'}{\left[\frac{1}{f^2(x)} \right]'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{-f'(x)}{f^2(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)}}{\frac{-2f(x) \cdot f'(x)}{f^4(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-f'(x)}{f^2(x)} \cdot \left[\sigma\upsilon\nu \frac{1}{f(x)} - 1 \right]}{\frac{-2f(x) \cdot f'(x)}{f^4(x)}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{1}{f(x)} - 1 \left(\frac{0}{0} \right)}{\frac{2}{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left[\sigma\upsilon\nu \frac{1}{f(x)} - 1 \right]'}{\left[\frac{2}{f(x)} \right]'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\eta\mu \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{-f'(x)}{f^2(x)}}{\frac{-2f'(x)}{f^2(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu \frac{1}{f(x)}}{-2} = \frac{\eta\mu 0}{-2} = 0$$

$$\Delta 3. F'(x) = \left(\int_a^x f(t) d(t) \right)' = f(x) < 0 \text{ (από } \Delta 1) \text{ άρα } F(x) \downarrow \text{ στο } (0, +\infty)$$

$$F''(x) = [f(x)]' = f'(x) = \left(\frac{\ln x - x}{e^x} \right)' = \frac{\left(\frac{1}{x} - 1 \right) e^x - (\ln x - x) e^x}{e^{2x}} = \frac{\frac{1}{x} - 1 - (\ln x - x)}{e^x} = \frac{\frac{1}{x} - 1 - \ln x + x}{e^x} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x} + [(x-1) - \ln x]}{e^x} > 0, \forall x > 0$$

άρα F κυρτή στο $(0, +\infty)$.

Από Θ.Μ.Τ. για την F(x) στο $[x, 2x]$ και στο $[2x, 3x]$ με $x > 0 \exists$

$$\xi_1 \in (x, 2x) : F'(\xi_1) = \frac{F(2x) - F(x)}{2x - x} = \frac{F(2x) - F(x)}{x}$$

Και

$$\xi_2 \in (2x, 3x) : F'(\xi_2) = \frac{F(3x) - F(2x)}{3x - 2x} = \frac{F(3x) - F(2x)}{x}$$

Είναι

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{F \uparrow}{=} F'(\xi_1) < F'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{F(2x) - F(x)}{x} < \frac{F(3x) - F(2x)}{x} \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} F(2x) - F(x) < F(3x) - F(2x)$$

$$\Leftrightarrow 2F(2x) < F(x) + F(3x)$$

Δ4. Αρκεί ν.δ.ο. έχει μια ρίζα στο $(\beta, 2\beta)$ η εξίσωση $F(\beta) + F(3\beta) = 2F(x)$

Έστω $h(x) = 2F(x) - [F(\beta) + F(3\beta)]$

- Η $h(x)$ ως άθροισμα συνεχών είναι συνεχής στο $[\beta, 2\beta]$
- $h(\beta) = 2F(\beta) - [F(\beta) + F(3\beta)] = F(\beta) - F(3\beta)$ Είναι $\beta < 3\beta \stackrel{F \downarrow}{\Rightarrow} F(\beta) > F(3\beta)$ άρα $h(\beta) > 0$.
- $h(2\beta) = 2F(2\beta) - [F(\beta) + F(3\beta)] < 0$ από Δ3.

Είναι $h(\beta) \cdot h(2\beta) < 0$.

Από θ. Bolzano $\exists \xi \in (\beta, 2\beta) : h(\xi) = 0$

Επειδή $h'(x) = 2F'(x) = 2f(x) < 0$ η $h(x)$ είναι $\downarrow$ στο $[\beta, 2\beta]$, επομένως το ξ είναι μοναδικό.