εκπαίδευση ΒΕΡΓΙΟΠΟΥΛΟΣ

Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΣΑΒΒΑΤΟ 14 ΜΑΪΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδειχθεί ότι:
$P(A-B)=P(A) - P(A\cap B)$.

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα;

Μονάδες 4

Α3. Τι εκφράζει η σχετική συχνότητα f_i μιας παρατήρησης x_i ενός δείγματος.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα, στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η διακύμανση εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

Μονάδες 2

β) Σε μία κανονική κατανομή το εύρος ισούται περίπου με έξι φορές τη μέση τιμή, δηλαδή $R\approx 6\bar{x}$.

Μονάδες 2

γ) Για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

Μονάδες 2

δ) Πάντοτε ένα μεγαλύτερο δείγμα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από ένα μικρότερο δείγμα.

Μονάδες 2

ε) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, αν ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν ξεπερνά το 10%.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Ένα κουτί περιέχει άσπρες, κόκκινες και μαύρες σφαίρες. Παίρνουμε τυχαία μια σφαίρα. Η πιθανότητα να είναι μαύρη είναι $P(M)=\frac{1}{4}$, η πιθανότητα να είναι άσπρη είναι $P(A)=4\lambda^2$ και η πιθανότητα να είναι κόκκινη είναι $P(K)=-5\lambda+\frac{7}{4}$, όπου $\lambda\in\Re$. Αν για το πλήθος $N(\Omega)$ των σφαιρών που υπάρχουν στο κουτί ισχύει $64<N(\Omega)<72$, τότε

Β1. Να δείξετε ότι $N(\Omega)=68$.

Μονάδες 6

Β2. Να υπολογιστεί η τιμή του λ.

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε πόσες άσπρες, πόσες μαύρες και πόσες κόκκινες σφαίρες υπάρχουν στο κουτί.

Μονάδες 6

Β4. Παίρνουμε τυχαία μία σφαίρα. Να βρεθεί η πιθανότητα αυτή να είναι άσπρη ή μαύρη.

Μονάδες 5

www.EKPAIDEYSH.gr

ΘΕΜΑ Γ

Οι πωλήσεις, σε χιλιάδες ευρώ, που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους ομαδοποιήθηκαν σε πίνακα συχνοτήτων με κλάσεις ίσου πλάτους. Το αντίστοιχο πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων f_i % έχει διαδοχικές κορυφές τις:

Α(8, 0) Β(10, 10) Γ(12, 20) Δ(14, y_Δ)

Ε(16, y_E) Ζ(18, 10) Η(20, 0)

όπου y_Δ, y_E οι τεταγμένες των κορυφών Δ και Ε του πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖΗ.

Γ1. Να υπολογιστούν οι τεταγμένες y_Δ και y_E των κορυφών Δ και Ε, αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή των πωλήσεων στη διάρκεια του έτους είναι 14200 ευρώ και το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο προς τον οριζόντιο άξονα

Μονάδες 7

Γ2. Να σχεδιαστεί το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων f_i %.

Μονάδες 3

Γ3. Να κατασκευαστεί ο πίνακας των σχετικών συχνοτήτων f_i % της κατανομής των πωλήσεων που έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.

Μονάδες 7

Γ4. Η διεύθυνση της εταιρείας αποφάσισε τη χορήγηση ενός επιπλέον εφάπαξ ποσού σε όσους πωλητές έχουν κάνει ετήσιες πωλήσεις τουλάχιστον 15000 ευρώ. Να υπολογιστεί το ποσοστό των πωλητών που θα λάβουν αυτό το ποσό.

Μονάδες 4

Γ5. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων οι οποίες έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους και του οριζόντιου άξονα είναι 80. Να βρείτε τον αριθμό των πωλητών που δικαιούνται το εφάπαξ ποσό που αναφέρεται στο Γ4 ερώτημα.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)}, \quad x \in \Re$$

Δ1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

Δ2. Αν Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$ και P(A), P(B) είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A \cap B)$, $P(A - B)$, $P(A \cup B)$, $P(B - A)$. **Μονάδες 8**

Δ3. Δίνεται η συνάρτηση

$$h(x) = e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right)}, \quad x \in \Re$$

α) Να λυθεί η εξίσωση f(x)=h(x).

Μονάδες 3

β) Αν $x_1 < x_2 < x_3$ οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης και $v_i = 2x_i + 1$, i=1,2,3 οι συχνότητες των παρατηρήσεων x_i τότε να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολ. σελ. 152

Α2. Όταν είναι ξένα μεταξύ τους δηλ. $A \cap B \neq \emptyset$

Α3. Το ποσοστό των παρατηρήσεων της x_i στο μέγεθος του δείγματος.

Α4.

α	β	γ	δ	ε
Λ	Λ	Σ	Λ	Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $P(M) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{N(M)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4} \Rightarrow N(M) = \frac{N(\Omega)}{4} \Leftrightarrow N(\Omega) = 4N(M)$

$64 < 4N(M) < 75$

$\frac{64}{4} < N(M) < \frac{72}{4}$

$16 < N(M) < 18$

$\Leftrightarrow N(M) = 17$ άρα $N(\Omega) = 68$

Β2. $P(M) + P(A) + P(K) = 1$

$\frac{1}{4} + 4\lambda^2 - 5\lambda + \frac{7}{4} = 1 \Leftrightarrow 1 + 16\lambda^2 - 20\lambda + 7 = 4$

$16\lambda^2 - 20\lambda + 8 = 4 \Leftrightarrow 16\lambda^2 - 20\lambda + 4 = 0$

$4\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0 \begin{cases} \lambda = 1 \quad \text{απορ.} \left[\text{διότι για } \lambda = 1 \text{ είναι } P(A) = 4 \cdot 1 = 4 \right. \\ \lambda = \frac{1}{4} \end{cases}$

Β3. Για $\lambda = \frac{1}{4}$ είναι : $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A) = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$, $P(K) = -\frac{5}{4} + \frac{7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{N(M)}{68} = \frac{1}{4} \Rightarrow N(M) = 17$

$\frac{N(A)}{68} = \frac{1}{4} \Rightarrow N(A) = 17$

$\frac{N(K)}{68} = \frac{1}{2} \Rightarrow N(K) = 34$

Β4. $P(\underbrace{A \cup M}_{\text{ασυμβίβαστα}}) = P(A) + P(M) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή $\Delta E // x'x$ είναι $y_\Delta = y_E$ (1)

Είναι $\bar{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i =$

$$= x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + x_4 \cdot f_4 + x_5 \cdot f_5 =$$

$$= 10 \cdot \frac{1}{100} + 12 \cdot \frac{20}{100} + 14 \cdot \frac{y_\Delta}{100} + 16 \cdot \frac{y_E}{100} + 18 \cdot \frac{10}{100} =$$

$$\overset{(1)}{=} 1 + 2,4 + \frac{14y_\Delta + 16y_\Delta}{100} + 1,8 =$$

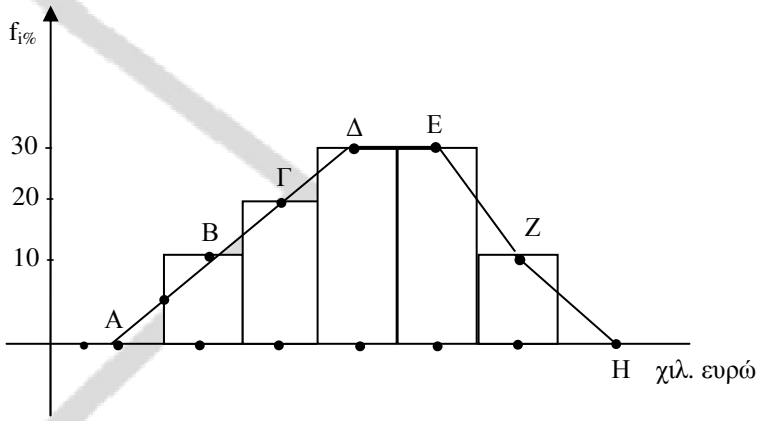
$$= 5,2 + \frac{30y_\Delta}{100} = 5,2 + 0,3y_\Delta$$

Είναι $\bar{x} = 14,2$

Άρα $5,2 + 0,3y_\Delta = 14,2 \Leftrightarrow 0,3y_\Delta = 9 \Leftrightarrow y_\Delta = \frac{9}{0,3} \Leftrightarrow y_\Delta = 30$

Άρα $y_\Delta = y_E = 30$

Γ2.



Γ3.

κλάσεις [-)	**κέντρο x_i**	**f_i%**
[9-11)	10	10
[11-13)	12	20
[13-15)	14	30
[15-17)	16	30
[17-19)	18	10
Σύνολο		100

Γ4. Οι πωλητές που θα λάβουν το επιπλέον ποσό είναι εκείνοι που ανήκουν στις κλάσεις [15-17), [17 , 19). Άρα το ποσοστό τους είναι 30% + 10% = 40%

Γ5. Το εμβαδόν του χωρίου εκφράζει το πλήθος των πωλητών. Δηλαδή V=80. Επομένως $40\% \cdot 80 = 32$ πωλητές δικαιούνται το επιπλέον ποσό.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x)=e^{\frac{1}{3}x\cdot(x^2-\frac{11}{10}\cdot x+\frac{2}{5})}$

$$f'(x)=e^{\frac{1}{3}x\cdot\left(x^2-\frac{11}{10}\cdot x+\frac{2}{5}\right)}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)+x\cdot\left(2x-\frac{11}{10}\right)\right]=$$

$$e^{\frac{1}{3}x\cdot(x^2-\frac{11}{10}\cdot x+\frac{2}{5})}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(x^2-\frac{11}{10}\cdot x+\frac{2}{5}+2x^2-\frac{11}{10}\cdot x\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot e^{\frac{1}{3}x\cdot(x^2-\frac{11}{10}\cdot x+\frac{2}{5})}\cdot\left(3x^2-\frac{11}{5}x+\frac{2}{5}\right)$$

Πρόσημο f΄

$$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow 3x^2-\frac{11}{5}x+\frac{2}{5}\geq 0\Leftrightarrow 15x^2-11x+2\geq 0 \qquad (1)$$

Ρίζες $\Delta=11^2-4\cdot 15\cdot 2=121-120=1$

$$\rho_{1,2}=\frac{11\pm 1}{30}\begin{cases}\rho_1=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}\\ \rho_2=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}\end{cases}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$15x^2-11x+2$		+	0	-	0	+	
f ΄(x)		+	0	-	0	+	
f (x)		↗		↘		↗	
			τ.μ.		τ.ε.		

Δ2. Επειδή $A\subseteq B$ είναι $P(A)\leq P(B)$

Επομένως $P(A)=\frac{1}{3}$ και $P(B)=\frac{2}{5}$

Είναι $(A\cap B)=A$ άρα $P(A\cap B)=P(A)=\frac{1}{3}$

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$$

Είναι $A\cup B=B$ άρα $P(A\cup B)=P(B)=\frac{2}{5}$

$$P(B-A)=P(B)-P(B\cap A)=\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{6-5}{15}=\frac{1}{15}$$

Δ3. α) $f(x)=h(x) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x\cdot(x^2-\frac{11}{10}\cdot x+\frac{2}{5})}=e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right)} \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{3}x\cdot\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5}x\cdot\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow$$

$$5x\cdot\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)=3x\cdot\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow$$

$$x\cdot\left[5x^2-\frac{11}{2}x+2-\frac{9x^2}{2}+3x+1\right]=0\Leftrightarrow$$

$$x\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+3\right)=0\begin{cases} x=0 \\ \text{ή} \\ \frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+3=0\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\begin{cases}x=2\\x=3\end{cases}\end{cases}$$

β) Είναι $x_1=0$ με $v_1=1$
$x_2=2$ με $v_2=5$
$x_3=3$ με $v_3=7$

$$\overline{x}=\frac{v_1\cdot x_1+v_2\cdot x_2+v_3\cdot x_3}{v_1+v_2+v_3}=\frac{0+10+21}{13}=\frac{31}{13}$$