

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ
(ΟΜΑΔΑ Β')
ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$. **Μονάδες 10**

A2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$; **Μονάδες 5**

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0 = 1$

β) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid \sin x = 0\}$ ισχύει: $(\operatorname{csc} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

δ) Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$

ε) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \quad \text{και} \quad w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$$

B1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z . **Μονάδες 7**

B2. Να αποδείξετε ότι $\bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$. **Μονάδες 4**

B3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$. **Μονάδες 8**

B4. Να αποδείξετε ότι: $|z - w| = |z|$. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0) = f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + x f''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 8**

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 3**

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμψής. **Μονάδες 7**

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \sin x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

i) $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$

ii) $\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$

iii) $\frac{1-g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)} dt$

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ότι $f(x)=g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 9

Δ2. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

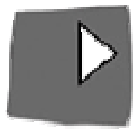
Μονάδες 4

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$.

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$F(x) = \int_1^x f(t^2) dt$ τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x=1$. **Μονάδες 7**



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A.1. Σχολικό βιβλίο σελ. 260

A.2. Σχολικό βιβλίο σελ. 280

A.1. α. Σ

β. Σ

γ. Λ

δ. Λ

ε. Σ

ΘΕΜΑ Β.

B.1. $|z - 3i| + \left| \overline{z + 3i} \right| = 2$

$$|z - 3i| + |z - 3i| = 2$$

$$2|z - 3i| = 2$$

$$|z - 3i| = 1 \quad \text{κύκλος κέντρων } K(0,3), \rho=1$$

B.2. $|z - 3i| = 1$

$$|z - 3i|^2 = 1$$

$$(z - 3i)(\overline{z - 3i}) = 1$$

$$(z - 3i)(\overline{z + 3i}) = 1$$

$$\overline{z + 3i} = \frac{1}{z - 3i}$$

B.3. $w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i} \quad \text{Αν } z = x + yi$

$$w = z - 3i + \overline{z + 3i}$$

$$w = z + \overline{z}$$

$$w = 2x$$

$$w \in \mathbb{R}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι :

$$-2 \leq w \leq 2$$

$$-2 \leq 2x \leq 2$$

$$-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1$$

$$\text{Είναι: } x^2 + (y - 3)^2 = 1 \Rightarrow (y - 3)^2 = 1 - x^2 \Rightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1$$

B.4. Είναι: $|z - w| \stackrel{\text{αρχική}}{=} \left| z - (z + \overline{z}) \right| = |z - z - \overline{z}| = |-\overline{z}| = |z|$

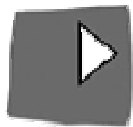
ΘΕΜΑ Γ.

Γ.1. $e^x \cdot (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + x \cdot f''(x) \Leftrightarrow e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f''(x) - e^x = f'(x) + x \cdot f''(x) \Leftrightarrow$

$$\left[e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f''(x) \right] - e^x - f'(x) - x \cdot f''(x) = 0 \Leftrightarrow \left[e^x \cdot f'(x) \right]' - [f'(x) + x \cdot f''(x)] = e^x \Leftrightarrow \left[e^x \cdot f'(x) \right]' - [x \cdot f'(x)]' = e^x$$

$$\left[e^x \cdot f'(x) - x \cdot f'(x) \right]' = [e^x]' \Rightarrow [f'(x) \cdot (e^x - x)]' = [e^x]' \Rightarrow f'(x) \cdot (e^x - x) = e^x + c \quad (1)$$

Για $x = 0 \Rightarrow f'(0) \cdot 1 = 1 + c \stackrel{\text{υποθ.}}{\Rightarrow} 0 = 1 + c \Leftrightarrow c = -1$



Για $c = -1 \Rightarrow f'(x) \cdot (e^x - x) = e^x - 1$ (2)

Θ.δ.ο. $e^x - x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Έστω $\sigma(x) = e^x - x, \quad x \in \mathbb{R}$

$\sigma'(x) = e^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$

$\sigma'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\sigma'(x)$	-	○	+
$\sigma(x)$			

ο.ε.
 $\sigma(0) = e^0 = 1$

Άρα $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι $\sigma(x) \geq \sigma(0) \Rightarrow \sigma(x) \geq 1 \Leftrightarrow e^x - x \geq 1$ (*)

Από (*) είναι $e^x - x > 0$ και η (2) γίνεται $f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(e^x - x)'}{e^x - x} \Leftrightarrow f(x) = \ln(e^x - x) + c$ (3)

Για $x = 0 \Rightarrow f(0) = \ln 1 + c \xRightarrow{\text{υποθ}} 0 = c$

Για $c = 0 \Rightarrow f(x) = \ln(e^x - x)$

Γ.2. $f(x) = \ln(e^x - x), x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}, x \in \mathbb{R}$

Επειδή $e^x - x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο της $f'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του $e^x - 1$.

Πρόσημο $f' \quad f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$			

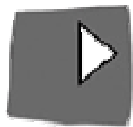
ο.ε.
 $f(0) = \ln 1 = 0$

Γ3. $f'(x) = \frac{(e^x - 1)'(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - x)'}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)'}{(e^x - x)^2} =$
 $= \frac{e^{2x} - xe^x - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} = \frac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2}, x \in \mathbb{R}$

Βρίσκουμε το πρόσημο της $f'(x)$ άρα το πρόσημό της $2e^x - xe^x - 1$

Έστω $h(x) = 2e^x - xe^x - 1, x \in \mathbb{R}$

$h'(x) = 2e^x - [e^x + xe^x] = 2e^x - e^x - xe^x = e^x - xe^x = (1 - x)e^x, x \in \mathbb{R}$



x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$			

ο.μ.

$$h(1)=2e-e-1=e-1$$

$$\text{Πρόσημο } h'(x) \quad h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (1-x)e^x \geq 0 \Leftrightarrow 1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - xe^x - 1)$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x)^{(-\infty)0} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x)'}{\left(\frac{1}{e^x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - xe^x - 1) = 0 - 0 - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - xe^x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x(2-x) - 1] = (+\infty)(-\infty) - 1 = -\infty$$

Άρα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(x)$		0	
$h(x)$	$-\infty$	$e-1$	$+\infty$

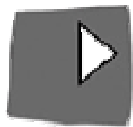
Επομένως η $h(x)$ έχει 2 ακριβώς ρίζες ρ_1, ρ_2 στο $(-\infty, 1)$ και στο $(1, +\infty)$ άρα η $f''(x)$ 2 ρίζες τις ρ_1, ρ_2 .
Επομένως η f έχει 2 σημεία καμπής.

Γ.4. Έστω $\varphi(x) = \ln(e^x - x) - \sin x$, $x \in \mathbb{R}$

- Η $\varphi(x)$ ως πράξεις συνεχών είναι συνεχείς στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- $\varphi(0) = \ln 1 - \sin 0 = 0 - 1 = -1 < 0$
- $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right) - \sin \frac{\pi}{2} = \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

$$\text{Από (*) για } x = \frac{\pi}{2} \text{ είναι } e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} > 1 \text{ άρα } \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$$

$$\text{Από Θ. Bolzano } \exists \xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : \varphi(\xi) = 0$$



Μοναδικότητα

$$\varphi'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + x} + \eta \mu x > 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{άρα } \varphi(x) \uparrow \text{ στο } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{άρα το } \xi \text{ είναι μοναδική ρίζα της } \varphi(x) \text{ στο } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

ΘΕΜΑ Δ.

$$\Delta.1. \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$$

Θέτουμε $x+t=u$ τότε

- $t = u - x$
- $dt = (u - x)' du = du$
- Για $t=0$ είναι $u=x$
- Για $t=-x$ είναι $u=0$

$$\text{Άρα } \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt = \int_x^0 \frac{e^{2(u-x)}}{g(u)} du = \int_x^0 \frac{e^{2u} \cdot e^{-2x}}{g(u)} du = - \int_0^x \frac{e^{2u}}{e^{2x} g(u)} du = - \frac{1}{e^{2x}} \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$$

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \frac{-1}{e^{2x}} \cdot \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow \boxed{f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du} \quad (1)$$

$$\text{Όμοια : } \frac{1-g(x)}{e^{2x}} = - \frac{1}{e^{2x}} \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du \Leftrightarrow \boxed{g(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du} \quad (2)$$

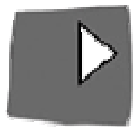
Επειδή η συνάρτηση $\frac{e^{2x}}{g(x)}$ και $\frac{e^{2x}}{f(x)}$ είναι συνεχείς οι συναρτήσεις $\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$ και $\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$ είναι παραγωγίσιμες, άρα οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Από (1)} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \\ \text{Από (2)} \Rightarrow g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} f'(x) \cdot g(x) = e^{2x} \\ f(x) \cdot g'(x) = e^{2x} \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$(3) \Rightarrow f'(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g'(x) \Leftrightarrow f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = C \quad (4)$$

$$\text{Για } x=0 \Rightarrow \frac{f(0)}{g(0)} = c \xrightarrow[\text{αρχικές}]{\text{Από}} \frac{1}{1} = c \Leftrightarrow c=1$$



Για $c=1 \Rightarrow \boxed{f(x)=g(x)}$

Δ.2. Για $f(x)=g(x) \Rightarrow f(x) \cdot f'(x) = e^{2x} \Rightarrow \left[\frac{f^2(x)}{2} \right]' = e^{2x} \Leftrightarrow \left[\frac{f^2(x)}{2} \right]' = \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]' \Leftrightarrow f^2(x) = e^{2x} + c \quad (5)$

Για $x=0$ είναι $f^2(0) = e^0 + c \Rightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$

Για $c=0 \Rightarrow f^2(x) = e^{2x} \Leftrightarrow f(x) = \pm \sqrt{e^{2x}} = \pm e^x$

Επειδή $f(x) > 0$ είναι $\boxed{f(x) = e^x}$

Δ.3.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln e^x}{e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[x \cdot e^{-1/x} \right]^{0 \cdot (+\infty)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-1/x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{+\infty}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(e^{-1/x})'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[-e^{-\frac{1}{x}} \right] = -\infty$$

Δ.4. $E = \int_0^1 |F(x)| dx$

$\forall x \in [0,1]$ είναι

$f(t^2) > 0 \quad \forall x \in [0,1]$

$\int_x^1 f(t^2) dt > 0 \Rightarrow -\int_1^x f(t^2) dt > 0 \Rightarrow \int_1^x f(t^2) dt < 0 \Rightarrow \text{άρα } F(x) < 0 \text{ στο } [0,1]$

Είναι $E = \int_0^1 |F(x)| dx = \int_0^1 -F(x) dx = -\int_0^1 F(x) dx = -\int_0^1 (x)' \cdot F(x) dx = -\left\{ [x \cdot F(x)]_0^1 - \int_0^1 x \cdot F'(x) dx \right\} =$

$= -[x \cdot F(x)]_0^1 + \int_0^1 x \cdot f(x^2) dx = -\left[1 \cdot \cancel{F(1)} - 0 \cdot F(0) \right] + \frac{1}{2} \int_0^1 2x \cdot e^{x^2} dx = 0 + \frac{1}{2} \left[e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} [e^1 - e^0] = \frac{1}{2} (e - 1) \quad \tau.μ.$