**ΘΕΜΑ Α**

A1. Έστω $t_1, t_2, \dots, t_n$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$

Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1 - \bar{x}, t_2 - \bar{x}, \dots, t_n - \bar{x}$

Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν.

Μονάδες 7

A2. Αν $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n και $w_1, w_2, \dots, w_n$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε το σταθμικό μέσο της μεταβλητής X .

Μονάδες 4

A3. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Να δώσετε τους ορισμούς του βέβαιου ενδεχομένου και του αδύνατου ενδεχομένου.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 όρια πραγματικών αριθμούς, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

β) Για κάθε $x > 0$ ισχύει $(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$

γ) Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x=f(t)$, τη χρονική στιγμή t_0 είναι $v(t_0)=f'(t_0)$

δ) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$

ε) Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις.

Μονάδες 10**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1, \quad x \in \mathbb{R}$

B1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$

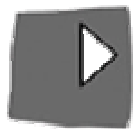
Μονάδες 10

B2. Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$

Μονάδες 10

B3. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$

Μονάδες 5



ΘΕΜΑ Γ

Οι τιμές της απώλειας βάρους, σε κιλά, 160 ατόμων, τα οποία ακολούθησαν ένα πρόγραμμα αδυνατίσματος, έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα:

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ v_i
[0 - ...)	...	20
[... - ...)	6	40
[... - ...)	...	45
[... - ...)	...	30
[... - ...)	...	25
ΣΥΝΟΛΟ		160

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c κάθε κλάσης είναι ίσο με 4

Μονάδες 6

Γ2. Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα σωστά συμπληρωμένο, να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση s

Μονάδες 8

Γ3. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

Γ4. Αν κάθε άτομο έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

A: « η απώλεια βάρους ενός ατόμου που επιλέχθηκε τυχαία να είναι από 7 μέχρι και 14 κιλά».

Μονάδες 6

$$\text{Δίνεται ο τύπος } s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right]$$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με αντίστοιχες πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ και η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(x - P(A)) - \frac{1}{2}(x - P(A))^2 + P(B), \quad x > P(A)$$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 13

Δ2. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = \frac{5}{3}$ με τιμή $f(x_0)=0$, να αποδείξετε ότι:

$$P(A) = \frac{2}{3} \text{ και } P(B) = \frac{1}{2}$$

Μονάδες 2

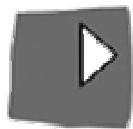
Λαμβάνοντας υπόψη το ερώτημα Δ2 και επιπλέον ότι $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$, να βρείτε την πιθανότητα:

Δ3. να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα A, B.

Μονάδες 5

Δ4. να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A, B.

Μονάδες 5



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

$$\text{A.1. } \frac{t_1 - \bar{x} + t_2 - \bar{x} + \dots + t_v - \bar{x}}{v} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v - v\bar{x}}{v} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v}{v} - \frac{v\bar{x}}{v} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

$$\text{A.2. } \bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_v w_v}{w_1 + w_2 + \dots + w_v} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i w_i}{\sum_{i=1}^v w_i}$$

A.3. • Βέβαιο ονομάζεται το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται πάντοτε (Ω)

• Αδύνατο ονομάζεται το ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται ποτέ (∅)

A.4. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1, x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{B.1. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(\sqrt{x^2 - x + 1} - 1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2[(\sqrt{x^2 - x + 1} - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)]}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2[(\sqrt{x^2 - x + 1})^2 - 1^2]}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - x + 1 - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{1^2 - 1 + 1} + 1} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{B.2. } f'(x) = 2(\sqrt{x^2 - x + 1})' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} \cdot (x^2 - x + 1)' = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$f'(0) = \frac{2 \cdot 0 - 1}{\sqrt{0^2 - 0 + 1}} = \frac{-1}{1} = -1$$

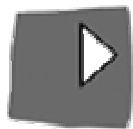
$$\text{B.3. } \varepsilon\varphi\omega = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = -\varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \omega = \frac{3\pi}{4}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1.

Απώλεια βάρους σε κιλά	Οι κλάσεις είναι	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα v_i
[0- c)	0-4	2	20
[c -2 c)	4-8	6	40
[2 c -3 c)	8-12	10	45
[3 c -4 c)	12-16	14	30
[4 c -5 c)	16-20	18	25
Σύνολο			160

$$\frac{c + 2c}{z} = 6 \Leftrightarrow 3c = 12 \Rightarrow c = 4$$



$$\Gamma.2. \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i \cdot v_i}{v} = \frac{\overbrace{2 \cdot 20}^{40} + \overbrace{6 \cdot 40}^{240} + \overbrace{10 \cdot 45}^{450} + \overbrace{14 \cdot 30}^{420} + \overbrace{18 \cdot 25}^{450}}{160} = \frac{1600}{160} = 10$$

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i =$$

$$= \frac{1}{160} [(2-10)^2 \cdot 20 + (6-10)^2 \cdot 40 + (10-10)^2 \cdot 45 + (14-10)^2 \cdot 30 + (18-10)^2 \cdot 25] =$$

$$= \frac{1}{160} (1280 + 640 + 480 + 1600) = \frac{1}{160} \cdot 4000 = 25$$

$$\text{Άρα } s = \sqrt{25} = 5$$

$$\Gamma.3. CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5}{10} = 50\% > 10\% \text{ μη ομοιογενές}$$

$$\Gamma.4. \frac{1}{4} \cdot 40 + 45 + \frac{1}{2} \cdot 30 = 10 + 45 + 15 = 70$$

$$P(A) = \frac{70}{160} = 43,75\%$$

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = \ln(x - P(A)) - \frac{1}{2}(x - P(A))^2 + P(B), \quad x > P(A)$$

$$\Delta.1. f'(x) = \frac{1}{x - P(A)} \cdot (x - P(A))' - \frac{1}{2} \cdot 2(x - P(A)) \cdot (x - P(A))' = \frac{1}{x - P(A)} - (x - P(A)) = \frac{1 - (x - P(A))^2}{x - P(A)}$$

$$= \frac{[1 - (x - P(A))] \cdot [1 + (x - P(A))]}{x - P(A)}$$

Επειδή είναι $x - P(A) > 0$ και $[x - P(A)] + 1 > 0$ το πρόσημο της $f'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $1 + P(A) - x$.

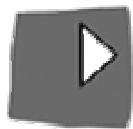
$$\text{Είναι } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + P(A) - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 + P(A)$$

x	$-\infty$	$P(A)$	$1+P(A)$	$+\infty$
$f'(x)$			+	-
$f(x)$			↗	↘

ο.μ.

$$f(1 + P(A)) = \ln(1 + P(A) - P(A)) - \frac{1}{2}(1 + P(A) - P(A))^2 + P(B) = \ln 1 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 + P(B) = P(B) - \frac{1}{2}$$

$$\Delta.2. \text{Είναι} \left. \begin{array}{l} 1 + P(A) = \frac{5}{3} \\ P(B) - \frac{1}{2} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} P(A) = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3} \\ P(B) = \frac{1}{2} \end{array} \right|$$



Λ.3. Είναι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\frac{5}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = \frac{4+3-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{άρα } P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Λ.4. } P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$