

ΘΕΜΑ Α

A.1 Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι :

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x)=F(x)+c, c \in \mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x)=F(x)+c, c \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 6

A2. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ ;

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

β) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ .

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) ,

$$\text{όπου } A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$$

δ) $(\sin x)' = \eta \mu x, x \in \mathbb{R}$

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{2}{z} = 2$ όπου $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$

B1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης.

Μονάδες 7

B2. Να αποδείξετε ότι

$$z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$$

Μονάδες 6

B3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει

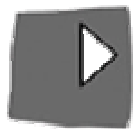
$$|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|$$

τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 7

B.4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος B3, να αποδείξετε ότι $3 \leq |w| \leq 7$

Μονάδες 5



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση :

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[\frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right]$$

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα $\psi\psi$.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^1 x f(x) dx$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις :

$$f(x) \neq x$$

$$f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x}, x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (f(x))^2 - 2xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$, είναι σταθερή.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}, x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x+1} f(t) dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t) dt, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεώρημα Σελ.304 Σχολ. Βιβλίου

A2. Θεώρημα Σελ.279 Σχολ. Βιβλίου

A3. Θεώρημα Σελ. 273 Σχολ. Βιβλίου

A4. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B.1. $z + \frac{2}{z} = 2, \quad z \neq 0$

$\Leftrightarrow z^2 + 2 = 2z \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$

$\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$

$z_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2} \begin{cases} z_1 = 1 - i \\ z_2 = 1 + i \end{cases}$

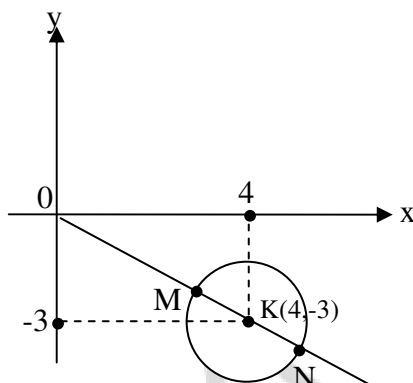
B.2. $z_1^{2010} + z_2^{2010} = (1 - i)^{2010} + (1 + i)^{2010} = [-i(1 + i)]^{2010} + (1 + i)^{2010} =$
 $= (-i)^{2010} \cdot (1 + i)^{2010} + (1 + i)^{2010} = i^{4 \cdot 502 + 2} \cdot (1 + i)^{2010} + (1 + i)^{2010} =$
 $= -(1 + i)^{2010} + (1 + i)^{2010} = 0$

B.3. $|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow$

$|w - 4 + 3i| = |1 - i - 1 - i| \Leftrightarrow$

$|w - 4 + 3i| = | -2i | \Leftrightarrow$

$|w - (4 - 3i)| = 2$



Άρα ο γ.τ. των εικόνων του w είναι κύκλος με κέντρο $K(4, -3)$ και ακτίνα $\rho=2$

Ο w με το ελάχιστο μέτρο έχει εικόνα το M και με το μέγιστο μέτρο έχει εικόνα το N

Άρα $(OM) \leq |W| \leq (ON)$

Είναι $(OM) = (OK) - \rho \sqrt{4^2 + (-3)^2} - 2 = \sqrt{25} - 2 = 5 - 2 = 3$

$(ON) = (OK) + \rho = 5 + 2 = 7$

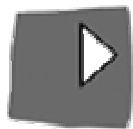
Άρα $3 \leq |w| \leq 7$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1), \quad x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2 + 1} (x^2 + 1)' = 2 + \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 2 + 2x}{x^2 + 1} = \frac{2(x^2 + x + 1)}{x^2 + 1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Άρα $f(x) \uparrow$ στο $\mathbb{R}$



$$\Gamma 2. 2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[\frac{(3x-2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right] \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + 2(-3x + 2) = \ln[(3x-2)^2 + 1] - \ln(x^4 + 1) \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + \ln(x^4 + 1) = \ln[(3x-2)^2 + 1] - 2(-3x + 2) \Leftrightarrow$$

$$f(x^2) = \ln[(3x-2)^2 + 1] + 2(3x-2) \Leftrightarrow$$

$$f(x^2) = f(3x-2) \xLeftrightarrow[f_{i-1}^{\uparrow}] x^2 = 3x-2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ \text{ή} \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Gamma 3. f''(x) &= \left[2 + \frac{2x}{x^2 + 1} \right]' = 0 + \left[\frac{2x}{x^2 + 1} \right]' = 2 \cdot \left[\frac{x}{x^2 + 1} \right]' = \\ &= 2 \cdot \frac{(x)' \cdot (x^2 + 1) - x \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = 2 \cdot \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= 2 \cdot \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{Πίξεις } f'' \quad 2 \cdot \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	○	+	○
f(x)	∩		∪	∩

σ.κ.

σ.κ.

$$f(-1) = -2 + \ln 2$$

$$f(1) = 2 + \ln 2$$

Άρα η c_f έχει σημεία καμπής τα $A(-1, -2 + \ln 2)$ και $B(1, 2 + \ln 2)$

$$(\varepsilon_1) = y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x + 1)$$

$$f'(-1) = \frac{2 \cdot (1 - 1 + 1)}{1 + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{άρα } (\varepsilon_1): y - (-2 + \ln 2) &= 1 \cdot (x + 1) \Leftrightarrow y = x + 1 - 2 + \ln 2 \\ &y = x - 1 + \ln 2 \end{aligned}$$

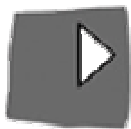
$$(\varepsilon_2): y - (2 + \ln 2) = 3 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow$$

$$y = 3x - 3 + 2 + \ln 2 \Leftrightarrow y = 3x - 1 + \ln 2$$

Για $x=0 \xrightarrow{(\varepsilon_1)} y = -1 + \ln 2$ άρα η (ε_1) τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $M(0, -1 + \ln 2)$

Για $x=0 \xrightarrow{(\varepsilon_2)} y = -1 + \ln 2$ άρα η (ε_2) τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0, -1 + \ln 2)$

Επομένως οι $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ τέμνονται πάνω στον $y'y$ στο σημείο $M(0, -1 + \ln 2)$



$$\begin{aligned} \Gamma 4. I &= \int_{-1}^1 x f(x) dx = \int_{-1}^1 x \cdot [2x + \ln(x^2 + 1)] dx = \\ &= \int_{-1}^1 [2x^2 + x \cdot \ln(x^2 + 1)] dx = \int_{-1}^1 2x^2 dx + \int_{-1}^1 x \cdot \ln(x^2 + 1) dx \quad (1) \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 2x^2 dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{-1}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \quad (2)$$

$$\text{Έστω } J = \int_{-1}^1 x \cdot \ln(x^2 + 1) dx$$

$$\text{Θέτουμε } x^2 + 1 = u \text{ τότε } du = (x^2 + 1)' dx = 2x dx \quad \text{άρα } x dx = \frac{1}{2} du$$

$$\begin{aligned} &\bullet \text{ Για } x = -1 \text{ είναι } u = 2 \\ &\text{Για } x = 1 \text{ είναι } u = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } J = \int_2^2 \frac{1}{2} \ln u du = \frac{1}{2} \int_2^2 \ln u du = 0 \quad (3)$$

$$\text{Η (1) λόγω των (2) και (3) είναι } I = \frac{4}{3} + 0 = \frac{4}{3}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Επειδή f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq x$ στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση $\frac{x}{f(x) - x}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Άρα η συνάρτηση $\int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Επομένως η $f(x) = x + 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \left[x + 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt \right]' = 1 + \frac{x}{f(x) - x} = \frac{f(x) - x + x}{f(x) - x} = \frac{f(x)}{f(x) - x}$$

Δ2. $g(x) = f^2(x) - 2xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2f(x) \cdot f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x) = 2f'(x) \cdot [f(x) - x] - 2f(x) = \\ &= 2 \cdot \frac{f(x)}{f(x) - x} \cdot [f(x) - x] - 2f(x) = 2f(x) - 2f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

άρα $g(x) = C$, $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow g(0) = C \Leftrightarrow f^2(0) = C \Rightarrow 3^2 = C \Leftrightarrow C = 9$$

Άρα $g(x) = 9$, $x \in \mathbb{R}$

Δ3. Από Δ2 είναι $g(x) = 9 \Leftrightarrow$

$$f^2(x) - 2xf(x) = 9 \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow$$

$$[f(x) - x]^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow$$



$$f(x) - x = \pm\sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow f(x) = x \pm \sqrt{x^2 + 9}$$

Επειδή $f(0)=3$ απορρίπτεται η λύση $f(x)=x-\sqrt{x^2+9}$

$$\text{Άρα } f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$$

Δ4. Έστω $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$ είναι $F'(x) = f(x)$

$$\begin{aligned} \text{Αρκεί ν.δ.ο. } \int_x^{x+1} f(t)dt &< \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt \Leftrightarrow \\ \int_x^0 f(t)dt + \int_0^{x+1} f(t)dt &< \int_{x+1}^0 f(t)dt + \int_0^{x+2} f(t)dt \Leftrightarrow \\ -\int_0^x f(t)dt + \int_0^{x+1} f(t)dt &< -\int_0^{x+1} f(t)dt + \int_0^{x+2} f(t)dt \Leftrightarrow \\ \int_0^{x+1} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt &< \int_0^{x+2} f(t)dt - \int_0^{x+1} f(t)dt \Leftrightarrow \\ F(x+1) - F(x) &< F(x+2) - F(x+1) \end{aligned}$$

Επειδή $F(x)$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την $F(x)$, στο $[x, x+1]$ και $[x+1, x+2]$, $x \in \mathbb{R}$

Από Θ.Μ.Τ.

$$\exists \xi_1 \in (x, x+1) : F'(\xi_1) = \frac{F(x+1) - F(x)}{x+1 - x} = F(x+1) - F(x) \Leftrightarrow f(\xi_1) = F(x+1) - F(x) \quad (1)$$

Από Θ.Μ.Τ.

$$\exists \xi_2 \in (x+1, x+2) : F'(\xi_2) = \frac{F(x+2) - F(x+1)}{x+2 - (x+1)} = F(x+2) - F(x+1) \Leftrightarrow f(\xi_2) = F(x+2) - F(x+1)$$

(2)

Εξετάζουμε την μονοτονία της $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$, $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{\sqrt{x^2+9} + x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{x + \sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ είναι } \sqrt{x^2+9} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$$

$$\text{άρα } \sqrt{x^2+9} + x > 0$$

επομένως $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ άρα $f(x) \uparrow$ στο $\mathbb{R}$

$$\text{Είναι } \xi_1 < \xi_2 \xrightarrow{f \uparrow} f(\xi_1) < f(\xi_2) \xrightarrow{(1),(2)}$$

$$F(x+1) - F(x) < F(x+2) - F(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$$