

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 18 ΜΑΪΟΥ 2009
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει ότι
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Μονάδες 10

B. Αν $x_1, x_2, \dots, x_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n ($k \leq n$), να ορίσετε τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i=1, 2, \dots, k$.

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x) + f(x)g'(x)$$

Μονάδες 2

β. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε ισχύει ότι
$$A - B = A \cap B'$$

Μονάδες 2

γ. Για τη συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$ ισχύει ότι

$$(\eta \mu x)' = -\sigma \nu x$$

Μονάδες 2

δ. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

Μονάδες 2

ε. Η μέση τιμή ενός συνόλου n παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο θέσης.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές x_i , $i=1, 2, 3, 4$ μιας μεταβλητής X με αντίστοιχες συχνότητες v_i , $i=1, 2, 3, 4$. Η συχνότητα v_2 που αντιστοιχεί στην τιμή $x_2=3$ είναι άγνωστη. Δίνεται ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι ίση με $\bar{x} = 4$.

x_i	v_i
2	6
3	;
5	3
8	4

α. Να αποδείξετε ότι $v_2 = 7$.

Μονάδες 9

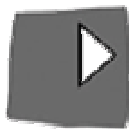
β. Να αποδείξετε ότι η διακύμανση των παρατηρήσεων είναι ίση με 4,9.

Μονάδες 9

γ. Να εξετάσετε αν το δείγμα των τιμών της μεταβλητής X είναι ομοιογενές.

Δίνεται ότι $\sqrt{4,9} \approx 2,2$

Μονάδες 7



ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-6x^2+ax-7$, όπου a πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει $2f''(x)+f'(x)+15=3x^2, x \in \mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι $a=9$.

Μονάδες 7

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2-1}$.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-3x$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x - \frac{x}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2, x > 0$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός.

A. α. Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 6

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα.

Μονάδες 6

B. Θεωρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης $f(2), f(4), f(8), f(3)$ και $f(5)$ είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X .

α. Αν R είναι το εύρος και δ η διάμεσος των παρατηρήσεων, να δειχθεί ότι

$$R = 3 + \ln \frac{1}{4} \text{ και } \delta = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$$

Μονάδες 7

β. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{1,2,3,\dots,100\}$ ο οποίος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Αν το λ παίρνει τιμές στο δειγματικό χώρο Ω , να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

$$A=\{\lambda \in \Omega \mid R + \delta < -2\}$$

Μονάδες 6



ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 150.

Β. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ. 65.

Γ. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Είναι: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i}{v} \Leftrightarrow 4 = \frac{2 \cdot 6 + 3v_2 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 8}{6 + v_2 + 3 + 4} \Leftrightarrow 4 = \frac{12 + 3v_2 + 15 + 32}{v_2 + 13} \Leftrightarrow$
 $4v_2 + 52 = 59 + 3v_2 \Leftrightarrow v_2 = 59 - 52 \Leftrightarrow v_2 = 7$

β.

x_i	v_i	$x_i v_i$	x_i^2	$x_i^2 v_i$
2	6	12	4	24
3	7	21	9	63
5	3	15	25	75
8	4	32	64	256
ΣΥΝΟΛΟ	20	80		418

$$S^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum x_i^2 v_i - \frac{(\sum x_i v_i)^2}{v} \right\} = \frac{1}{20} \left(418 - \frac{80^2}{20} \right) =$$

$$= \frac{1}{20} \left(418 - \frac{6400}{20} \right) = \frac{1}{20} (418 - 320) = \frac{98}{20} = 4.9$$

γ. Είναι: $CV = \frac{S}{\bar{x}}$

Είναι: $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{4.9} \approx 2.2$

Άρα: $CV = \frac{2.2}{4} = 0.55 = 55\% > 10\%$. Επομένως, το δείγμα είναι ανομοιογενές.

ΘΕΜΑ 3^ο

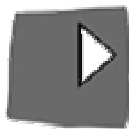
α. $A_f = R$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + \alpha$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } 2f''(x) + f'(x) + 15 &= 2(6x - 12) + 3x^2 - 12x + \alpha + 15 = \\ &= 12x - 24 + 3x^2 - 12x + \alpha + 15 = \\ &= 3x^2 + \alpha - 9 \end{aligned}$$

Οπότε, η σχέση γράφεται: $3x^2 + \alpha - 9 = 3x^2 \Leftrightarrow \alpha - 9 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 9$.



β. Είναι: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 12x + 9}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2 - 4x + 3)}{x^2 - 1} =$ (Ρίζες του τριωνύμου το 1 και το 3)

$$= 3 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = 3 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = 3 \cdot \frac{-2}{2} = -3$$

γ. Έστω ε η εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$ και $\varepsilon_1: y = -3x$.

Αφού: $\varepsilon \parallel \varepsilon_1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_{\varepsilon_1} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -3 \Leftrightarrow f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 12x_0 + 9 = -3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3x_0^2 - 12x_0 + 12 = 0 \Leftrightarrow 3(x_0^2 - 4x_0 + 4) = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$$

Είναι: $f(x_0) = f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 7 = 8 - 24 + 18 - 7 = -5$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της c_f στο $A(2, -5)$ είναι:

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y + 5 = -3(x - 2) \Leftrightarrow$$

$$y = -3x + 6 - 5 \Leftrightarrow y = -3x + 1$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Α. α. $A_f = (0, +\infty)$.

$$f'(x) = \left(\ln x - \frac{x}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2 \right)' = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{2-x}{2x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{2x} = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{2x} > 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$$

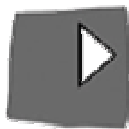
x	0	2	$+\infty$
f'(x)	///	+	-
f(x)	///		

MEΓ

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$

β. Η f παρουσιάζει μέγιστο το: $f(2) = \ln 2 - 1 + \lambda^2 - 6\lambda + 2 =$
 $= \lambda^2 - 6\lambda + 2 + \ln 2 - 1.$

Β. α. $f(2) = \ln 2 - 1 + \lambda^2 - 6\lambda + 2 = \ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1$



$$f(4) = \ln 4 - 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 2 = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$$

$$f(8) = \ln 8 - 4 + \lambda^2 - 6\lambda + 2 = \ln 8 + \lambda^2 - 6\lambda - 2$$

$$f(3) = \ln 3 - \frac{3}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2 = \ln 3 + \lambda^2 - 6\lambda + \frac{1}{2}$$

$$f(5) = \ln 5 - \frac{5}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2 = \ln 5 + \lambda^2 - 6\lambda - \frac{1}{2}$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$.

Άρα, $f(8) < f(3) < f(4) < f(5) < f(2)$.

$$R = f(2) - f(8) = \ln 2 - 1 + \lambda^2 - 6\lambda + 2 - \ln 8 + 4 - \lambda^2 + 6\lambda - 2$$

$$= \ln 2 - \ln 8 + 3 = 3 + \ln \frac{2}{8} = 3 + \ln \frac{1}{4}$$

Επειδή το πλήθος των τιμών x_i είναι περιττός $v = 5$, τότε $\delta = f(4) = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$.

β. $R + \delta < -2$

$$3 + \ln \frac{1}{4} + \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda < -2$$

$$3 + \ln \left(\frac{1}{4} \cdot 4 \right) + \lambda^2 - 6\lambda + 2 < 0$$

$$3 + 0 + \lambda^2 - 6\lambda + 2 < 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 < 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 36 - 20 = 16$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2} \rightarrow \lambda_1 = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\rightarrow \lambda_2 = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Πίνακας Προσήμων

λ	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$\lambda^2 - 6\lambda + 5$	+	○	○	+

$$\lambda \in (1, 5)$$

Επειδή $\lambda \in \Omega$, τότε $\lambda \in \{2, 3, 4\}$.

Άρα, $A = \{2, 3, 4\}$. Επομένως: $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{100} = 0,03$