

ΗΜΕΡΗΣΙΟ ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2009

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x) = 0$ να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 10

B. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Μονάδες 2

β. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

Μονάδες 2

γ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

Μονάδες 2

δ. Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

ε. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ και ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι $E(\Omega) = \int_a^\beta f(x) dx$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i$, $\lambda \in \mathbb{R}$

A.α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z , για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 9

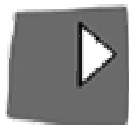
β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = 1 - i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

Μονάδες 8

B. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0$

όπου z_0 ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

Μονάδες 8



ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = a^x - \ln(x+1), \quad x > -1,$$

Όπου $a > 0$ και $a \neq 1$

Α. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $a = e$

Μονάδες 8

Β. Για $a = e$,

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Μονάδες 5

β. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

Μονάδες 6

γ. αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\beta)-1}{\beta-1} + \frac{f(\gamma)-1}{\gamma-2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2]$ για την οποία ισχύει

$$\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$H(x) = \int_0^x tf(t)dt, \quad x \in [0, 2]$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3, & x \in (0, 2] \\ 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x = 0 \end{cases}$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 2)$ και ότι ισχύει

$$G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}, \quad 0 < x < 2$$

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $a \in (0, 2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $H(a) = 0$.

Μονάδες 7

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\xi \in (0, a)$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$a \int_0^\xi tf(t)dt = \xi^2 \int_0^a f(t)dt$$

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 251
B. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ. 213
Γ. α. Σ β. Σ γ. Λ δ. Λ ε. Λ

ΘΕΜΑ 2^ο

Είναι $z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Aα. Η εικόνα του z είναι το σημείο $A(2\lambda + 1, 2\lambda - 1)$.

Θέτω $2\lambda + 1 = x$ και $2\lambda - 1 = \psi$

Οπότε $\lambda = \frac{x-1}{2}$ (1) και $\lambda = \frac{\psi+1}{2}$ (2)

Από (1), (2) $\Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{\psi+1}{2} \Leftrightarrow x-1 = \psi+1 \Leftrightarrow \psi = x-2$ (1)

β.

- Για $\psi = 0$ τότε $x = 2$ τέμνει τον $x'x$ στο $K(2,0)$
- Για $x = 0$, τότε $y = -2$ τέμνει τον $\psi\psi$ στο $\Lambda(0, -2)$
Φέρνω την $OM \perp KL$
Οπότε $\lambda_{OM} \cdot \lambda_{KL} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{OM} \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow \lambda_{OM} = -1$
Άρα η εξίσωση της OM είναι: $y = \lambda_{OM} \cdot x \Leftrightarrow \psi = -x$ (2)

Λύνω το σύστημα (1), (2)

$$\begin{cases} \psi = -x \\ \psi = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = -x \\ x = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = x \\ -2x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

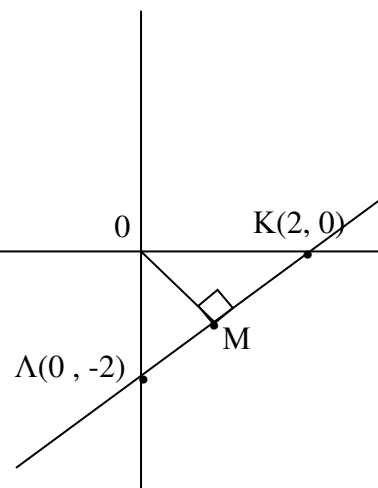
Άρα $M(1, -1)$

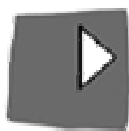
Επομένως ο μιγαδικός της αριθμός της ευθείας (ϵ) με το μικρότερο μέτρο είναι ο $z_0 = 1 - i$

B. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $W = x + \psi i$, $x, \psi \in \mathbb{R}$

Η σχέση γράφεται: $|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0 \Leftrightarrow x^2 + \psi^2 + x - \psi i - 12 = 1 - i \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \psi^2 + x - 12 = 1 \\ -\psi = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 + x - 12 - 1 = 0 \\ \psi = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 12 = 0 \\ \psi = 1 \end{cases} \quad (1)$$





Για την (1) έχουμε : $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1 + 48 = 49$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{-8}{2} = -4 \\ x_2 = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

Άρα οι μιγαδικοί αριθμοί είναι : $w_1 = -4 + i$ ή $w_2 = 3 + i$

ΘΕΜΑ 3^ο :

$f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$ $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$

A. $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow \alpha^x - \ln(x+1) \geq 1$ (1)

i) Παρατηρούμε ότι για $x_0 = 0$ είναι $f(x_0) = 1$ άρα στο $x_0 = 0$ η f παρουσιάζει ελάχιστο

ii) Η $f(x)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων είναι παραγωγίσιμη στο $A_f = (-1, +\infty)$ με

$$f'(x) = \alpha^x \cdot \ln \alpha - \frac{1}{x+1}$$

Λύνω την **i)** και **ii)** από θ. Fermat είναι $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha^0 \cdot \ln \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = 1$
 $\Leftrightarrow \alpha = e$

B.α) Για $\alpha = e$ είναι

$$f(x) = e^x - \ln(x+1) , \quad x > -1$$

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1} \quad x > -1$$

$$f''(x) = e^x - \frac{-(x+1)'}{(x+1)^2} = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \quad \forall x > -1$$

Άρα η f είναι κυρτή στο $A_f = (-1, +\infty)$

β. $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1} , \quad x > -1$

1^{ος} τρόπος : Παρατηρούμε ότι το $x_0 = 0$ είναι προφανής ρίζα της $f'(x)$

Επειδή $f''(x) > 0$ η $f'(x)$ είναι $\uparrow$ στο $(-1, +\infty)$

άρα $\forall x \in A_f = (-1, +\infty)$ με $x < 0$ είναι $f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

και με $x > 0$ είναι $f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Επομένως η f είναι γν. φθίν. στο $(-1, 0]$ και γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$

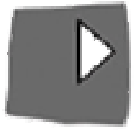
2^{ος} τρόπος : $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1} = \frac{e^x \cdot (x+1) - 1}{x+1} , \quad x > -1$

Επειδή $x+1 > 0 \quad \forall x \in A_f = (-1, +\infty)$ το πρόσημο της $f'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο της $g(x) = e^x \cdot (x+1) - 1$ στο $(-1, +\infty)$

Είναι $g(x) = e^x \cdot (x+1) - 1 , \quad x \in \mathbb{R}$

$g'(x) = e^x \cdot (x+1) + e^x = e^x \cdot (x+2)$

Είναι $g'(x) > 0 \quad \forall x \in (-1, +\infty)$ άρα $g(x) \uparrow$ στο $(-1, +\infty)$



Προφανής ρίζα της $g(x)$ είναι το $x_0 = 0$

Άρα $\forall x \in (-1, 0]$ είναι $x \leq 0 \xRightarrow{g \uparrow} g(x) \leq g(0) \Leftrightarrow g(x) \leq 0$ και $f'(x) = \frac{g(x)}{x+1} \leq 0$

Επομένως $f \downarrow$ στο $(-1, 0]$

$\forall x \in [0, +\infty)$ είναι $x \geq 0 \xRightarrow{g \uparrow} g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq 0$

άρα και $f'(x) = \frac{g(x)}{x+1} \geq 0$ επομένως $f \uparrow$ στο $[0, +\infty)$

γ. Αρκεί ν.δ.ο. έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$ η εξίσωση
 $[f(\beta) - 1] \cdot (x - 2) + [f(\gamma) - 1] \cdot (x - 1) = 0$

Έστω $h(x) = [f(\beta) - 1] \cdot (x - 2) + [f(\gamma) - 1] \cdot (x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$

- Η $h(x)$ ως άθροισμα συνεχών είναι συνεχής στο $[1, 2]$
- $h(1) = -[f(\beta) - 1] < 0$ διότι είναι $f(x) \geq 1 \quad \forall x \geq 1 \quad \forall x \in (-1, +\infty)$
 και $f(x) > 1 \quad \forall x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

- $h(2) = [f(\gamma) - 1] > 0$

Είναι $h(1) \cdot h(2) < 0$

Από θ. Bolzano $\exists \rho \in (1, 2) : h(\rho) = 0$

ΘΕΜΑ 4^ο:

$$\int_0^2 (t - 2) f(t) dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 t \cdot f(t) dt - 2 \int_0^2 f(t) dt = 0 \quad (1)$$

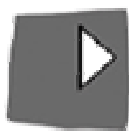
α.

- Η $f(x)$ συνεχής στο $[0, 2]$ άρα η $\int_0^x f(t) dt$ παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $[0, 2]$ με $\left(\int_0^x f(t) dt \right)' = f(x)$
- Η $t \cdot f(t)$ συνεχής στο $[0, 2]$ άρα η $H(x) = \int_0^x t \cdot f(t) dt$ παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $[0, 2]$ με $H'(x) = x \cdot f(x)$
- Η $G(x)$ ως πράξεις συνεχών είναι συνεχής στο $(0, 2)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t) dt + 3 \right] \quad (1)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{H(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{H(x)}{x} - \frac{x \cdot f(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} [x \cdot f(x)] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x f(t) dt = 0$$

Από (1) είναι $\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = 3$



$$\begin{aligned} G(0) &= 6 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - t^2}}{t^2} = 6 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - t^2)}{t^2 \cdot (1 + \sqrt{1 - t^2})} = 6 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2 \cdot (1 + \sqrt{1 - t^2})} = \\ &= 6 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - t^2}} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \end{aligned}$$

Είναι $\lim_{t \rightarrow 0} G(x) = G(0)$ επομένως η $G(x)$ είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$

β. Η $G(x)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{H'(x)x - H(x)}{x^2} - f(x) = \\ &= \frac{x^2 \cdot f(x) - H(x)}{x^2} - f(x) = f(x) - \frac{H(x)}{x^2} - f(x) = -\frac{H(x)}{x^2} \end{aligned}$$

γ. Εφαρμόζουμε θ. Rolle για την $G(x)$

- Η $G(x)$ είναι συνεχής στο $[0, 2]$
- Η $G(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$
- $G(0) = 3$

$$\begin{aligned} G(2) &= \frac{H(2)}{2} - \int_0^2 f(t)dt + 3 = \frac{H(2) - 2 \int_0^2 f(t)dt}{2} + 3 = \\ &= \frac{\int_0^2 t f(t) - 2 \int_0^2 f(t)dt}{2} + 3 \stackrel{(1)}{=} \frac{0}{2} + 3 = 3 \end{aligned}$$

$$\text{Από θ. Rolle } \exists \alpha \in (0, 2) : G'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\frac{H(\alpha)}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow H(\alpha) = 0$$

δ) Θ.Μ.Τ. για $G(x)$ στο $[0, \alpha]$

- Η $G(x)$ είναι συνεχής στο $[0, \alpha]$
- Η $G(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \alpha)$ με $G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}$

$$\text{Από Θ.Μ.Τ. } \exists \xi \in (0, \alpha) \subset (0, 2) : G'(\xi) = \frac{G(\alpha) - G(0)}{\alpha - 0} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{\frac{H(\alpha)}{\alpha} - \int_0^\alpha f(t)dt + 3 - 3}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\alpha \cdot H(\xi) = \xi^2 \cdot \frac{H(\alpha)}{\alpha} - \xi^2 \cdot \int_0^\alpha f(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\alpha \int_0^\xi t \cdot f(t)dt = \xi^2 \cdot \int_0^\alpha f(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot \int_0^\xi t f(t)dt = \xi^2 \cdot \int_0^\alpha f(t)dt$$