



ΘΕΜΑΤΑ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΠΕΜΠΤΗ 22 ΜΑΪΟΥ 2008

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ (όπου x πραγματικός αριθμός) είναι ίση με 0, δηλαδή $(c)' = 0$.

Μονάδες 8

B. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής X , αν $\bar{x} > 0$ και πώς, αν $\bar{x} < 0$

Μονάδες 7

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν A, B είναι δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε ο τύπος

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ισχύει μόνον όταν τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω είναι ισοπίθανα.

Μονάδες 2

β. Η διάμεσος δ ενός δείγματος n παρατηρήσεων $t_1, t_2, \dots, t_n$ είναι πάντοτε μία από τις παρατηρήσεις αυτές.

Μονάδες 2

γ. Αν $x > 0$, τότε $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Μονάδες 2

δ. Αν x_0 είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta_{mx} = \eta_{mx_0}$.

Μονάδες 2

ε. Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x f(x)}{x^2 - 1}$.

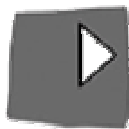
Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι $e^x f'(x) = 2 - x$.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)$.

Μονάδες 9



ΘΕΜΑ 3ο

Για δυο τύπους μπαταριών Α και Β επιλέχθηκαν δυο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα (σε χιλιάδες ώρες) δίνονται στον επόμενο πίνακα:

A	B
20	26
26	32
24	19
22	20
18	23

α. Να βρείτε τη μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου Α και μιας μπαταρίας τύπου Β.

Μονάδες 5

β. Αν μια μπαταρία τύπου Α στοιχίζει 38 ευρώ και μια μπαταρία τύπου Β στοιχίζει 40 ευρώ, ποιον τύπο μπαταρίας συμφέρει να αγοράσετε; (Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε τις τυπικές αποκλίσεις S_A και S_B της διάρκειας ζωής των δυο τύπων μπαταριών.

Μονάδες 7

δ. Να βρείτε ποιος από τους δυο τύπους μπαταριών Α και Β παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του.

Δίνεται ότι $\sqrt{11} \approx 3,3$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Το 50% των κατοίκων μιας πόλης διαβάζουν την εφημερίδα α, ενώ το 30% των κατοίκων διαβάζουν την εφημερίδα α και δεν διαβάζουν την εφημερίδα β.

α. Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία, να μη διαβάζει την εφημερίδα α ή να διαβάζει την εφημερίδα β;

Μονάδες 7

β. Ορίζουμε το ενδεχόμενο

B: «ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία, διαβάζει την εφημερίδα β».

Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}$$

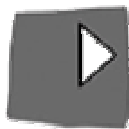
Μονάδες 9

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + P(B) \cdot x$$

όπου x πραγματικός αριθμός και B το ενδεχόμενο που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x) δεν έχει ακρότατα.

Μονάδες 9



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A: Σχολικό βιβλίο σελ. 28

B: Σχολικό βιβλίο σελ. 96

$$CV = \frac{S}{|x|}$$

- Αν $\bar{x} > 0$, τότε $CV = \frac{S}{x}$
- Αν $\bar{x} < 0$, τότε $CV = -\frac{S}{x}$

Γ: **α** (Λ) **β** (Λ) **γ** (Σ) **δ** (Σ) **ε** (Σ)

ΘΕΜΑ 2^ο:

$e^x \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $A_f = \mathbb{R}$

α. Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x \frac{x-1}{e^x}}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2 - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παρ/μων συναρτήσεων με :

$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{e^x} \right)' = \frac{(x-1)'e^x - (x-1)(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{e^x - (x-1)e^x}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x(1 - x + 1)}{(e^x)^2} = \frac{2-x}{e^x}$$

Άρα έχουμε : $e^x \cdot f'(x) = e^x \cdot \frac{2-x}{e^x} = 2-x$

γ. Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{e^x} = 0 \stackrel{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} 2-x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$	$+2$	$+\infty$
f'(x)	+	-	
f(x)			

max

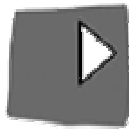
Για $x = 2$ ή f παρουσιάζει μέγιστο το $f(2) =$
 $\frac{2-1}{e^2} = \frac{1}{e^2} = e^{-2}$

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Η μέση διάρκεια ζωής για τις μπαταρίες τύπου A είναι

$$\bar{X}_A = \frac{20+26+24+22+18}{5} = \frac{110}{5} = 22$$

Η μέση διάρκεια ζωής για τις μπαταρίες τύπου B είναι $\bar{X}_B = \frac{26+32+19+20+23}{5} = 24$



β. Οι μπαταρίες τύπου Α κοστίζουν ανά χιλιάδα ώρες $38 : 22 = 1,72 \text{ €}$

Οι μπαταρίες τύπου Β κοστίζουν ανά χιλιάδα ώρες $40 : 24 = 1,66 \text{ €}$

Άρα συμφέρει να αγοραστούν μπαταρίες τύπου Β.

$$\begin{aligned} \gamma. S^2_A &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{5} [(20 - 22)^2 + (26 - 25)^2 + (24 - 22)^2 + (22 - 22)^2 + (18 - 22)^2] \\ &= \frac{1}{5} (4 + 16 + 4 + 0 + 16) = \frac{40}{5} = 8. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } S_A = \sqrt{S^2_A} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} S^2_B &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{5} [(26 - 24)^2 + (32 - 24)^2 + (19 - 24)^2 + (20 - 24)^2 + (23 - 24)^2] \\ &= \frac{1}{5} (4 + 64 + 25 + 16 + 1) = \frac{110}{5} = 22 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } S^2_B = \sqrt{S^2_B} = \sqrt{22} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{11} \approx 3,3\sqrt{2}$$

$$\delta. CV_A = \frac{S_A}{\bar{X}_A} = \frac{2\sqrt{2}}{22} = \frac{\sqrt{2}}{11}$$

$$CV_B = \frac{S_B}{\bar{X}_B} = \frac{3,3\sqrt{2}}{24}$$

$$\begin{aligned} \text{Έστω } \frac{\sqrt{2}}{11} < \frac{3,3\sqrt{2}}{24} &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{11} - \frac{3,3\sqrt{2}}{24} < 0 \Leftrightarrow \frac{24\sqrt{2} - 36,3\sqrt{2}}{264} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}(24 - 36,3)}{264} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{12,3 \cdot \sqrt{2}}{264} < 0 \quad \text{που ισχύει.} \end{aligned}$$

Άρα ο τύπος Α παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του.

ΘΕΜΑ 4^ο

A: διαβάζουν την εφημερίδα α.

B: διαβάζουν την εφημερίδα β.

$$P(A) = \frac{50}{100}$$

$$P(A - B) = \frac{30}{100}$$

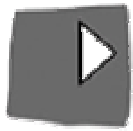
$$\alpha. P(A' \cup B) = P[(A - B)'] = 1 - P(A - B) = 1 - \frac{30}{100} = \frac{70}{100}$$

$$\beta. \text{Ισχύει: } P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{30}{100} = \frac{50}{100} - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$P(A \cap B) = \frac{50}{100} - \frac{30}{100} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Ισχύει: } A \cap B \subseteq B \subseteq A' \cup B \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq P(B) \leq P(A' \cup B)$$

$$\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}$$



γ. Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική με

$$f'(x) = \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + P(B)x\right)'$$

$$= 3x^2 - x + P(B)$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 3P(B) = 1 - 12P(B)$$

Βρίσκουμε το πρόσημο του $1 - 12P(B)$, σύμφωνα με το β .

$$\text{Έχουμε: } \frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10} \Leftrightarrow \frac{-12}{5} \geq -12P(B) \geq -12P(B) \geq -12 \cdot \frac{7}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-12}{5} \geq -12P(B) \geq -\frac{84}{10} \Leftrightarrow 1 - \frac{12}{5} \geq 1 - P(B) \geq 1 - \frac{84}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{5} \geq P(B) \geq -\frac{74}{10} \Leftrightarrow -\frac{7}{5} \geq \Delta \geq -\frac{74}{10}.$$

Άρα $\Delta < 0$.

Οπότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η f δεν έχει ακρότατα.