

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

22/05/2007

ΘΕΜΑ 1^ο:

1. Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$.
Μονάδες 8
- Β.α.** Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
Μονάδες 4
- β.** Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων, όταν ο n είναι άρτιος αριθμός.
Μονάδες 3
- Γ.1.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i .
Μονάδες 2
- β.** Αν f, g είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης ισχύει: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.
Μονάδες 2
- γ.** Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (a, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (a, β) για $x = x_0$ ελάχιστο.
Μονάδες 2
- Γ.2.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:
 $f_1(x) = x^v$, όπου v φυσικός
 $f_2(x) = \ln x$, όπου $x > 0$
 $f_3(x) = \sqrt{x}$, όπου $x > 0$
 $f_4(x) = \sin x$, όπου x πραγματικός.
Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = xe^x + 3$, όπου x πραγματικός αριθμός.

- α.** Να αποδείξετε ότι $f'(x) = f(x) + e^x - 3$.
Μονάδες 10
- β.** Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - e^x}{x^2 - x}$.
Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 3^ο:

Εστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ για τον οποίο ισχύει $P(-1)=P(0)=P(1)=P(2)=2P(3)=2P(4)=2P(5)$. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα του Ω :
 $A = \{1, 3, x^2 - x - 3\}$, $B = \{2, x + 1, 2x^2 + x - 2, -2x + 1\}$ όπου x ένας πραγματικός αριθμός.

- α. Να βρεθούν οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω , δηλαδή οι $P(-1), P(0), P(1), P(2), P(3), P(4), P(5)$. **Μονάδες 7**
- β. Να βρεθεί η μοναδική τιμή του x για την οποία ισχύει $A \cap B = \{-1, 3\}$. **Μονάδες 8**
- γ. Για $x=-1$ να δειχθεί ότι: $P(A) = \frac{5}{11}$, $P(B) = \frac{7}{11}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{11}$ και στη συνέχεια να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A-B)$ και $P(A \cup B')$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 4^ο :

Θεωρούμε δύο δείγματα A και B με παρατηρήσεις:

Δείγμα A : 12, 18, $t_3, t_4, \dots, t_{25}$

Δείγμα B : 16, 14, $t_3, t_4, \dots, t_{25}$

Δίνεται ότι $t_3+t_4+\dots+t_{25} = 345$

- α. Να αποδείξετε ότι οι μέσες τιμές $\bar{x}_A$ και $\bar{x}_B$ των δύο δειγμάτων A και B αντίστοιχα είναι $\bar{x}_A = \bar{x}_B = 15$. **Μονάδες 7**
- β. Αν s_A^2 είναι η διακύμανση του δείγματος A και s_B^2 είναι η διακύμανση του δείγματος B , να αποδείξετε ότι $s_A^2 - s_B^2 = \frac{16}{25}$ **Μονάδες 8**
- γ. Αν ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος A είναι ίσος με $CV_A = \frac{1}{15}$, να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής CV_B του δείγματος B . **Μονάδες 10**

Καλή επιτυχία!!!

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ :

ΘΕΜΑ 1^ο:

Α. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελ. 152

Β.α. Όταν υπάρχει το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός (Σελ. 22)

β. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελ. 87

Γ.1. **α.** Σ **β.** Σ **γ.** Λ

2. $f_1(x) = x^v$	$f_1'(x) = vx^{v-1}$
$f_2(x) = \ln x$	$f_2'(x) = \frac{1}{x}$
$f_3(x) = \sqrt{x}$	$f_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f_4(x) = \sin x$	$f_4'(x) = \cos x$

ΘΕΜΑ 2^ο:

α. $A_f = \mathbb{R}$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως άθροισμα παρ/μων συναρτήσεων με :
 $f'(x) = (xe^x + 3)' = (x)'e^x + x(e^x)' + (3)' = e^x + xe^x + 0 = e^x + xe^x$ (1)

Είναι $f(x) = xe^x + 3 \Leftrightarrow xe^x = f(x) - 3$ (2)

Η (1) με βάση την (2) γράφεται : $f'(x) = e^x + f(x) - 3 \Leftrightarrow f'(x) = f(x) + e^x - 3$

β. Έχουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - e^x}{x^2 - x} &\stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + xe^x - e^x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^x}{x(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^0}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3^ο:

α) Έστω $P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = 2P(3) = 2P(4) = 2P(5) = \kappa$ (1)

Είναι $P(-1) + P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$

$$\kappa + \kappa + \kappa + \kappa + \frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa}{2} = 1 \Leftrightarrow 4\kappa + \frac{3\kappa}{2} = 1 \Leftrightarrow 11\kappa = 2 \Leftrightarrow \kappa = \frac{2}{11}$$

Άρα $P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = \frac{2}{11}$ και $P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1}{11}$

β) Για να είναι $A \cap B = \{-1, 3\}$ πρέπει το -1 να είναι στοιχείο του A δηλ. πρέπει

$$x^2 - x - 3 = -1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ \text{ή} \\ x = 2 \end{cases}$$

Για $x = -1$ είναι $B = \{2, 0, -1, 3\}$ και $A \cap B = \{-1, 3\}$

Για $x = 2$ είναι $B = \{2, 3, 8, -3\}$ αδύνατο, διότι το B δεν είναι ενδεχόμενο του Ω

Άρα $x = -1$

γ) Για $x = -1$ είναι $A = \{1, 3, -1\}$ και $B = \{2, 0, -1, 3\}$

$$\text{άρα } P(A) = P(1) + P(3) + P(-1) = \frac{2}{11} + \frac{1}{11} + \frac{2}{11} = \frac{5}{11}$$

$$P(B) = P(2) + P(0) + P(-1) + P(3) = \frac{2}{11} + \frac{2}{11} + \frac{2}{11} + \frac{1}{11} = \frac{7}{11}$$

Επιπλέον $A \cap B = \{-1, 3\}$

$$P(A \cap B) = P(-1) + P(3) = \frac{2}{11} + \frac{1}{11} = \frac{3}{11}$$

$$\text{Είναι } P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{5}{11} - \frac{3}{11} = \frac{2}{11}$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } P(A \cup B) &= P(B - A)' = 1 - P(B - A) = 1 - [P(B) - P(A \cap B)] = \\ &= 1 - \left[\frac{7}{11} - \frac{3}{11} \right] = 1 - \frac{4}{11} = \frac{7}{11} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4^ο:

α. Ισχύει: $\bar{x}_A = \frac{\sum_{i=1}^v t_i}{v} = \frac{\sum_{i=1}^{25} t_i}{25} = \frac{12+18+t_3+t_4+\dots+t_{25}}{25} = \frac{30+345}{25} = \frac{375}{25} = 15$

Όμοια $\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^v t_i}{v} = \frac{\sum_{i=1}^{25} t_i}{25} = \frac{16+14+t_3+t_4+\dots+t_{25}}{25} = \frac{30+345}{25} = \frac{375}{25} = 15$

β. Ισχύει $S_A^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^v t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{25} t_i \right)^2}{v} \right\} = \frac{1}{25} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{25} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{25} t_i \right)^2}{25} \right\} =$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{25} t_i^2}{25} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{25} t_i}{25} \right)^2 = (\bar{x}_A)^2 - (\bar{x}_A)^2 \quad (1)$$

Όμοια $S_B^2 = (\bar{x}_B)^2 - (\bar{x}_B)^2 \quad (2)$



$$\begin{aligned}
 S_A^2 - S_B^2 &= \left[\overline{(x_A^2)} - (\bar{x}_A)^2 \right] - \left[\overline{(x_B^2)} - (\bar{x}_B)^2 \right] = \\
 &= \overline{(x_A^2)} - (\bar{x}_A)^2 - \overline{(x_B^2)} + (\bar{x}_B)^2 = \\
 &= \overline{(x_A^2)} - (\bar{x}_B)^2 = \frac{12^2 + 18^2 + t_3^2 + t_4^2 + \dots + t_{25}^2}{25} - \frac{16^2 + 14^2 + t_3^2 + t_4^2 + \dots + t_{25}^2}{25} \\
 &= \frac{144 + 324 + t_3^2 + t_4^2 + \dots + t_{25}^2 - 256 - 196 - t_3^2 - t_4^2 - \dots - t_{25}^2}{25} = \\
 &= \frac{468 - 452}{25} = \frac{16}{25}
 \end{aligned}$$

γ. Είναι $CV_A = \frac{1}{15} \Leftrightarrow \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{1}{15} \Leftrightarrow \frac{S_A}{15} = \frac{1}{15} \Leftrightarrow S_A = 1$

Από β) ερώτημα είναι $S_A^2 - S_B^2 = \frac{16}{25} \Leftrightarrow 1^2 - S_B^2 = \frac{16}{25} \Leftrightarrow S_B^2 = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow S_B^2 = \frac{9}{25} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow S_B = \frac{3}{5} \quad (\text{αφού } S_B > 0)$

Άρα $CV_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{5}{15}} = \frac{3}{5 \cdot 15} = \frac{1}{25}$