

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1 Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Μονάδες 8

A.2 Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

A.3 Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και για κάθε $x \in [a, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε

$$\int_a^\beta f(x) dx > 0$$

Μονάδες 2

β. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

Μονάδες 2

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

Μονάδες 2

δ. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ , τότε

$$\left(\int_a^{g(x)} f(t) dt \right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

Μονάδες 2

ε. Αν $a > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{2+ai}{a+2i}$ με $a \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Μονάδες 9

β. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z = \frac{2+ai}{a+2i}$.

για $a = 0$ και $a = 2$ αντίστοιχα.

ι. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 .

Μονάδες 8

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $(z_1)^{2v} = (-z_2)^v$ για κάθε φυσικό αριθμό v .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$ όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

α. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 7

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 8

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f , να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 3

δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0, 1]$ για την οποία ισχύει $f(0) > 0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ για την οποία ισχύει $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t) \cdot g(t) dt, \quad x \in [0, 1]$$

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt, \quad x \in [0, 1]$$

α. Να δειχθεί ότι $F(x) > 0$ για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$.

Μονάδες 8

β. Να αποδειχθεί ότι: $f(x) \cdot G(x) > F(x)$ για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$.

Μονάδες 6

γ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$$

για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$.

Μονάδες 4

δ. Να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t) g(t) dt \right) \cdot \left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt \right)}{\left(\int_0^x g(t) dt \right) \cdot x^5}.$$

Μονάδες 7

Καλή επιτυχία!!!

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1^ο :

- A.1. Θεωρία, Σχολ. Βιβλίου σελ. 98
 A.2. Θεωρία, Σχολ. Βιβλίου σελ. 141
 A.3. Θεωρία, Σχολ. Βιβλίου σελ. 280

B. α. Λ β. Λ γ. Λ δ. Σ ε. Σ

Θέμα 2^ο:

α. Αρκεί : $|z| = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2+ai}{a+2i}\right)\overline{\left(\frac{2+ai}{a+2i}\right)} = 1 \Leftrightarrow$
 $\left(\frac{2+ai}{a+2i}\right)\left(\frac{2-ai}{a-2i}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{4-2ai+2ai-4^2i^2}{a^2-2ai+2ai+4i^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{4+\alpha^2}{\alpha^2+4} = 1 \Leftrightarrow 1=1 \quad \text{ισχύει :}$

Άρα $|z| = 1$, επομένως η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z ανήκει σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και $\rho = 1$.

β. Για $\alpha = 0$, τότε : $z_1 = \frac{2+0i}{0+2i} = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = -i = 0-i$

Για $\alpha = 2$ τότε : $z_2 = \frac{2+2i}{2+2i} = 1 = 1+0i$

i) Έστω $A(z_1)$, $B(z_2)$ οι εικόνες αντίστοιχα των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 τότε $A(0, -1)$ και $B(1, 0)$

Άρα $(AB) = |z_1 - z_2| = |-i - 1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

ii) Έχουμε : $z_1^{2v} = (-i)^{2v} = i^{2v} = (i^2)^v = (-1)^v = (-z_2)^v$

Θέμα 3^ο :

α. $A_f = \mathbb{R}$

Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση με

$f'(x) = (x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta)' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$

Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -1$

Φτιάχνουμε πίνακα προσήμων της f'

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f'(x)	+	○	-	○	+
f(x)					

T.M.

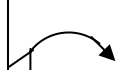
T.E.

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$
- Η f παρουσιάζει Τ.Ε. για $x = 1$ το $f(1) = 1 - 3 - 2\eta\mu^2\theta = -2 - 2\eta\mu^2\theta$
- Η f παρουσιάζει Τ.Μ. για $x = -1$ το $f(-1) = -1 + 3 - 2\eta\mu^2\theta = 2 - 2\eta\mu^2\theta$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική με $f'(x) = (3x^2 - 3)' = 6x$

Έχουμε $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Φτιάχνουμε πίνακα προσήμων για την f''

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Η c_f έχει σημείο καμπής το $A(0, f(0)) = A(0, -2\eta\mu^2\theta)$

β. Αν $x \in (-\infty, -1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε το σύνολο τιμών είναι της μορφής $(A, B]$ όπου:

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2\eta\mu^2\theta}{x^3} \right) \right] = (-\infty)(1 - 0 - 0) = -\infty$$

$$B = f(-1) = 2 - 2\eta\mu^2\theta \geq 0 \text{ γιατί } 1 \geq \eta\mu^2\theta \Leftrightarrow 2 - 2\eta\mu^2\theta \geq 0$$

$$\text{Άρα } f(A_1) = (-\infty, 2 - 2\eta\mu^2\theta]$$

Επειδή το $0 \in f(A_1)$ και η f είναι  θα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-\infty, -1]$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$

• Αν $x \in (-1, 1)$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε το σύνολο τιμών είναι της μορφής $(f(1), f(-1)) = (-2 - 2\eta\mu^2\theta, 2 - 2\eta\mu^2\theta) = f(A_2)$ όμως $-2 - 2\eta\mu^2\theta \leq 0$ και $2 - 2\eta\mu^2\theta \geq 0$ αφού $-1 < \eta\mu\theta \leq 1$

Επειδή το $0 \in f(A_2)$ και η f είναι  θα υπάρχει μοναδικό $x_2 \in [-1, 1]$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$

• Αν $x \in [1, +\infty)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε το σύνολο τιμών είναι της μορφής $f(A_3) = [\Gamma, \Delta)$ όπου $\Gamma = f(1) = -2 - 2\eta\mu^2\theta$ και

$$\Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2\eta\mu^2\theta}{x^3} \right) \right] = (+\infty) \cdot (1 - 0 - 0) = +\infty$$

$$\text{οπότε } f(A_3) = [-2 - 2\eta\mu^2\theta, +\infty)$$

Επειδή το $0 \in f(A_2)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, υπάρχει μοναδικό $x_3 \in [1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_3) = 0$

Άρα η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες

γ. • $A(-1, f(-1)) = A(-1, 2 - 2\eta\mu^2\theta)$

Για $x = -1$ και $y = 2 - 2\eta\mu^2\theta$ τότε :

$$y = -2x - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow 2 - 2\eta\mu^2\theta = 2 - 2\eta\mu^2\theta \text{ ισχύει}$$

Άρα $A \in (\varepsilon)$



• $B(1, f(1)) = B(1, -2 - 2\eta\mu^2\theta)$

Για $x = 1$ και $y = -2 - 2\eta\mu^2\theta$ τότε :

$y = -2x - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow -2 - 2\eta\mu^2\theta = -2 - 2\eta\mu^2\theta$ ισχύει

Άρα $B \in (\varepsilon)$

• $\Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$

Για $x = 0$ και $y = -2\eta\mu^2\theta$ τότε :

$y = -2x - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow -2\eta\mu^2\theta = 0 - 2\eta\mu^2\theta$ ισχύει

Άρα $\Gamma \in (\varepsilon)$

δ. Έχουμε $f(x) - y = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta + 2x + 2\eta\mu^2\theta =$

$= x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$

$f(x) - y = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 1$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f(x)-y	-	+	-	+	-

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_{-1}^1 |f(x) - y| dx = \int_{-1}^1 |x^3 - x| dx = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx - \int_0^1 (x^3 - x) dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ τ.μ} \end{aligned}$$

Θέμα 4^ο :

α. $F'(x) = f(x)g(x) \quad \forall x \in (0, 1]$

$\forall x \in (0, 1) \quad \text{είναι} \quad x > 0 \xRightarrow{f \uparrow} f(x) > f(0) \xRightarrow{g(x) > 0} f(x) \cdot g(x) > f(0) \cdot g(x) > 0$

άρα $F'(x) > 0$ άρα $F(x) \uparrow$

$\forall x \in (0, 1] \Rightarrow x > 0 \xRightarrow{F \uparrow} F(x) > F(0) \Leftrightarrow F(0) > 0$

β. 1^{ος} τρόπος:

Εστω $x \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} \forall t \in (0, x) \quad \text{είναι} \quad t < x \xRightarrow{f \uparrow} g(t) < g(x) \Rightarrow f(t)g(t) < f(x)g(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^x f(t)g(t) dt < \int_0^x f(x)g(t) dx \Leftrightarrow F(x) < f(x) \cdot G(x) \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος: Με παραδοχή ότι η f είναι παραγωγίσιμη

$h(x) = f(x) \cdot G(x) - F(x), \quad x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) \cdot G(x) + f(x) \cdot G'(x) - F'(x) = \\ &= f'(x) \cdot G(x) + f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) = \\ &= f'(x) \cdot G(x) \geq 0 \end{aligned}$$

Άρα $h(x) \uparrow$ στο $[0, 1]$

$\forall x \in (0, 1] \quad \text{είναι} \quad x > 0 \xRightarrow{h \uparrow} h(x) > h(0) \Leftrightarrow$

$h(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot G(x) - F(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot G(x) > F(x)$



$$\gamma. \quad \sigma(x) = \frac{F(x)}{G(x)} \Rightarrow \sigma'(x) = \frac{F'(x) \cdot G(x) - F(x) \cdot G'(x)}{G^2(x)} = \frac{f(x)g(x) \cdot G(x) - F(x) \cdot g(x)}{G^2(x)} =$$

$$= \frac{g(x) \cdot [f(x)G(x) - F(x)]}{G^2(x)} > 0$$

Άρα $\sigma(x) \uparrow$

$$\forall x \in (0, 1] \quad \text{είναι} \quad x \leq 1 \stackrel{\sigma(x) \uparrow}{\Rightarrow} \sigma(x) \leq \sigma(1) \Leftrightarrow \frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$$

δ.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)g(t) dt \right) \cdot \left(\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt \right)}{\left(\int_0^x g(t) dt \right) \cdot x^5} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\int_0^x f(t)g(t) dt}{\int_0^x g(t) dt} \cdot \frac{\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt}{x^5} \right] \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t)g(t) dt}{\int_0^x g(t) dt} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)g(t) dt \right)'}{\left(\int_0^x g(t) dt \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)g(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) > 0 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt \right)'}{(x^5)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x^4 \cdot 2x}{5x^4} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\eta \mu x^4}{x^4} \cdot \frac{2x}{5} \right] = 1 \cdot 0 = 0 \quad (3)$$

$$(1) \stackrel{(2), (3)}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)g(t) dt \right) \cdot \left(\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt \right)}{\left(\int_0^x g(t) dt \right) \cdot x^5} = f(0) \cdot 0 = 0$$