

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
2006

ΘΕΜΑ 1°

A.1 Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

Να αποδείξετε ότι:

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 10

A.2 Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ ;

Μονάδες 5

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^2 = z^2$

Μονάδες 2

β. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 2

γ. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 2

δ. Ισχύει ο τύπος $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

ε. Ισχύει η σχέση $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$, όπου f, g ,

είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2°

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 + (x-2)^2$ με $x \geq 2$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 8

γ. i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y = x$.

Μονάδες 4

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3°

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

Μονάδες 9

ii. $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \geq -1$

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . **Μονάδες 8**

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της. **Μονάδες 5**

γ. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ln x$ στο σημείο $A(\alpha, \ln \alpha)$ με $\alpha > 0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ με $\beta \in \mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$. **Μονάδες 9**

δ. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δυο κοινές εφαπτόμενες. **Μονάδες 3**

Καλή επιτυχία !!!

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1^ο:

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 253

A2. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ. 273

- B. α. Λ
β. Σ
γ. Σ
δ. Λ
ε. Σ

Θέμα 2^ο

$$f(x)=2+(x-2)^2, x \geq 2$$

α) $A_f=[2, +\infty)$

Έχουμε: $f'(x)=(2+(x-2)^2)'=0+2(x-2)(x-2)'=2(x-2) \geq 0$, γιατί $x \geq 2$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$, οπότε είναι συνάρτηση «1-1»

β) Επειδή η f είναι «1-1» αντιστρέφεται

$$\text{Έστω } y=f(x) \Rightarrow y=2+(x-2)^2 \Leftrightarrow y-2=(x-2)^2 \quad (1)$$

$$\text{Πρέπει: } y-2 \geq 0 \Rightarrow y \geq 2 \text{ τότε } (1) \xRightarrow{x-2 \geq 0} (x-2)=\sqrt{y-2}, \Leftrightarrow x=2+\sqrt{y-2} \quad (2)$$

$$\text{Είναι } x \geq 2 \Rightarrow 2+\sqrt{y-2} \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{y-2} \geq 0, \text{ που ισχύει για κάθε } y \geq 2$$

Άρα $y \geq 2$, οπότε το σύνολο τιμών είναι: $f(A)=[2, +\infty)$

Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f με τύπο $f^{-1}(x)=2+\sqrt{x-2}$ και $A_{f^{-1}}=[2, +\infty)$

γ) i) Είναι $f(x)=x \Rightarrow 2+(x-2)^2=x \Rightarrow (x-2)^2-x+2=0 \Rightarrow (x-2)(x-2-1)=0 \Rightarrow x=2$ ή $x=3$

Οι τιμές $x=2$ ή $x=3$ επαληθεύουν και την $f^{-1}(x)=x$

Άρα τα κοινά σημεία είναι $A(2,2)$, $B(3,3)$

ii)

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$f(x)-x$		-		+

Αν Ω_1 : το χωρίο που περικλείεται από την C_f , την $y=x$, και $x=2$, $x=3$ είναι

$$\begin{aligned} E(\Omega_1) &= \int_2^3 |f(x) - x| dx = - \int_2^3 [f(x) - x] dx = - \int_2^3 [(x-2)^2 + 2 - x] dx = - \int_2^3 (x^2 - 5x + 6) dx = \\ &= - \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^3 + 5 \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^3 - 6 \cdot [x]_2^3 = - \left(\frac{27}{3} - \frac{8}{3} \right) + 5 \left(\frac{9}{2} - \frac{4}{2} \right) - 6(3-2) = -\frac{19}{3} + \frac{25}{2} - 6 = \\ &= \frac{-38 + 75 - 36}{6} = \frac{1}{6} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Άρα το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των f και f^{-1} είναι $E(\Omega)=2 E(\Omega_1)=\frac{1}{3}$ τ.μ.

Θέμα 3^ο:

α. i) Ας αποδείξουμε ότι : $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| \stackrel{(-z_2 = z_1 + z_3)}{\Leftrightarrow} |2z_1 + z_3| = |z_1 + 2z_3|$
 $\Leftrightarrow |2z_1 + z_3|^2 = |z_1 + 2z_3|^2 \Leftrightarrow (2z_1 + z_3)(2\bar{z}_1 + \bar{z}_3) = (z_1 + 2z_3)(\bar{z}_1 + 2\bar{z}_3)$
 $\Leftrightarrow 4z_1\bar{z}_1 + 2z_1\bar{z}_3 + 2\bar{z}_1z_3 + z_3\bar{z}_3 = z_1\bar{z}_1 + 2z_1\bar{z}_3 + 2z_3\bar{z}_1 + 4z_3\bar{z}_3 \Leftrightarrow$
 $3z_1\bar{z}_1 = 3z_3\bar{z}_3 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 = z_3\bar{z}_3 \Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_3|^2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_3|$
 που ισχύει, από υπόθεση.

Όμοια αποδεικνύεται ότι $|z_2 - z_3| = |z_1 - z_3|$

ii) $|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2| = 1 + 1 = 2$

Άρα $|z_1 - z_2| \leq 2 \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 \leq 4$

Οπότε έχουμε :

$$|z_1 - z_2|^2 \leq 4 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \leq 4 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2 \leq 4 \Leftrightarrow 2 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 \leq 4 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 \geq -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \geq -2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \geq -1$$

β. Έστω $A(z_1)$ η εικόνα του z_1 , $B(z_2)$ η εικόνα του z_2 , $\Gamma(z_3)$ η εικόνα του z_3

Επειδή $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ τα A, B, Γ βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Επιπλέον είναι : $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3| \Leftrightarrow (AB) = (\Gamma A) = (B\Gamma)$

Άρα ο Γ, Δ είναι το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Θέμα 4^ο:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$$

α) Πρέπει $\left. \begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$

Άρα $A_f = (0,1) \cup (1, +\infty)$

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)' - (\ln x)' = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} = \frac{-2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} = \frac{-2x-(x-1)^2}{x \cdot (x-1)^2} =$$

$$= \frac{-[2x+(x-1)^2]}{x \cdot (x-1)^2} = \frac{-(x^2+1)}{x \cdot (x-1)^2} < 0 \quad \forall x \in A_f$$

Άρα $f(x) \downarrow$ στο A_f

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'(x)			-	
f(x)		$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = -1 - (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{x-1} \cdot (x+1) - \ln x \right] = (-\infty) \cdot 2 - 0 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{x-1} \cdot (x+1) - \ln x \right] = (+\infty) \cdot 2 - 0 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = 1 - (+\infty) = -\infty$$

Εστω $A_1 = (0, 1)$ και $A_2 = (1, +\infty)$

Είναι $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \mathbb{R} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$

β) Από τον πίνακα μεταβολών παρατηρούμε ότι υπάρχει $\rho_1 \in (0, 1): f(\rho_1) = 0$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$ ο αριθμός ρ_1 είναι μοναδικός. Επίσης υπάρχει $\rho_2 \in (1, +\infty): f(\rho_2) = 0$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$ ο ρ_2 είναι μοναδικός.

Άρα η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο A_f .

γ) $g(x) = \ln x, \quad x > 0$

$$g'(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

$$\varepsilon_1: y - g(\alpha) = g'(\alpha) \cdot (x - \alpha) \Leftrightarrow y - \ln \alpha = \frac{1}{\alpha} \cdot (x - \alpha) \Leftrightarrow y = \frac{1}{\alpha} \cdot x - 1 + \ln \alpha$$

$$h(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$h'(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\varepsilon_2 \equiv y - h(\beta) = h'(\beta) \cdot (x - \beta) \Leftrightarrow y - e^\beta = e^\beta \cdot (x - \beta) \Leftrightarrow$$

$$y = e^\beta \cdot x - \beta e^\beta + e^\beta \Leftrightarrow y = e^\beta \cdot x + e^\beta \cdot (1 - \beta)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\alpha} = e^\beta \\ \ln \alpha - 1 = e^\beta \cdot (1 - \beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{e^\beta} = e^{-\beta} \\ \ln \alpha = e^\beta (1 - \beta) + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{e^\beta} = e^{-\beta} \\ \ln e^{-\beta} = e^\beta (1 - \beta) + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = e^{-\beta} \\ -\beta = e^\beta \cdot (1 - \beta) + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = e^{-\beta} \\ -\beta - 1 = e^\beta \cdot (1 - \beta) \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } f(\alpha) = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} - \ln \alpha \stackrel{(1)}{=} \frac{\frac{1}{e^\beta} + 1}{\frac{1}{e^\beta} - 1} - \ln e^{-\beta} = \frac{1+e^\beta}{1-e^\beta} + \beta = \frac{1+e^\beta}{1-e^\beta} + \beta = \frac{1+e^\beta + \beta(1-e^\beta)}{1-e^\beta} =$$

$$= \frac{1+e^\beta + \beta - \beta e^\beta}{1-e^\beta} = \frac{1+\beta + (1-\beta)e^\beta}{1-e^\beta} \stackrel{(2)}{=} \frac{1+\beta - \beta - 1}{1-e^\beta} = 0$$

Άρα το α είναι ρίζα της $f(x)$.

δ) Επειδή η $f(x) = 0$ έχει 2 ακριβώς ρίζες και κάθε κοινή εφαπτομένη των C_g και C_h εφάπτεται της C_g στο x_0 που είναι ρίζα της $f(x) = 0$, υπάρχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες των C_g και C_h .