

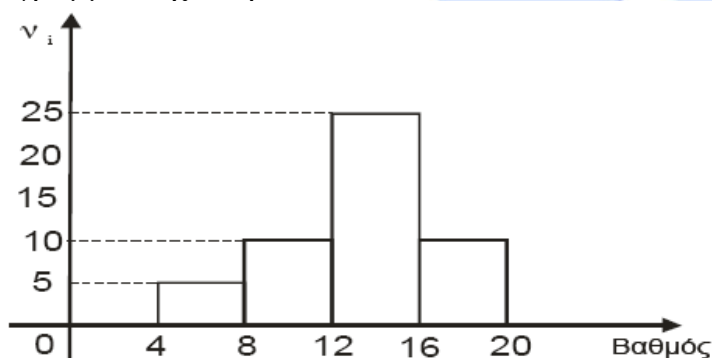
ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΣΑΒΒΑΤΟ 28 ΜΑΪΟΥ 2005
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A. Να αποδειχθεί ότι για δυο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. **Μονάδες 10**
 (Τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω να θεωρηθούν ισοπίθανα).
- B. α. Ποιες μεταβλητές λέγονται ποσοτικές; **Μονάδες 3**
 β. Πότε μια ποσοτική μεταβλητή ονομάζεται διακριτή και πότε συνεχής; **Μονάδες 4**
- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας τη λέξη **Σωστό ή Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ . **Μονάδες 2**
- β. Ισχύει $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις. **Μονάδες 2**
- γ. Η διακύμανση είναι μέτρο θέσης. **Μονάδες 2**
- δ. Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) > P(B)$. **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ 2ο

Σε ένα διαγώνισμα Βιολογίας η βαθμολογία των μαθητών δίνεται από το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων v_i :



- α. Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις βαθ/γίας [)	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Αθρ. σχετ. συχνότητα F_i
[4, 8)					
[8, 12)					
[12, 16)					
[16, 20)					
Σύνολο					

- β. Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών.

Μονάδες 11
Μονάδες 8

γ. Πόσοι μαθητές έχουν βαθμό το πολύ μέχρι και 10;
ΘΕΜΑ 3^ο:

Μονάδες 6

Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, ώστε να ισχύουν:

(i) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A, B είναι $\frac{7}{8}$.

(ii) Οι πιθανότητες $P(B)$, $P(A \cap B)$ δεν είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο $X = \left\{k, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right\}$, όπου

$$k = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 15}{x^2 - 6x + 5}$$

α. Να βρεθεί το k.

Μονάδες 5

β. Να βρεθούν τα $P(B)$, $P(A \cap B)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 8**

γ. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

(1) Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A.

Μονάδες 6

(2) Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4^ο:

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$.

α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $\Lambda(1,1)$.

Μονάδες 7

β. Από τυχαίο σημείο M(x, y) της γραφικής παράστασης της f φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες xx' και yy', οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες Ox, Oy ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου M, ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη.

Μονάδες 10

γ. Οι τετμημένες πέντε διαφορετικών σημείων της εφαπτομένης του ερωτήματος (α) έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 5$ και τυπική απόκλιση $S_x = 2$.

Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{y}$ και η τυπική απόκλιση S_y των τεταγμένων των σημείων αυτών.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο:

- Α. Θεωρία σελ. 151 Σχολικό βιβλίο
Β.α. Θεωρία σελ. 59 Σχολικό βιβλίο
β. Θεωρία σελ. 59 Σχολικό βιβλίο
Γ.α. Σ
β. Λ
γ. Λ
δ. Λ

ΘΕΜΑ 2^ο:

α.

Κλάσεις Βαθ/γίας [)	Κέντρο Κλάσης x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Αθρ. Σχετ. συχνότητα F_i
[4, 8)	6	5	0,1	5	0,1
[8, 12)	10	10	0,2	15	0,3
[12, 16)	14	25	0,5	40	0,8
[16, 20)	18	10	0,2	50	1
Σύνολο		50	1		

$$\beta. \bar{x} = \frac{6 \cdot 5 + 10 \cdot 10 + 14 \cdot 25 + 18 \cdot 10}{50}$$

$$\bar{x} = \frac{660}{50}$$

$$\bar{x} = 13,2$$

$$\gamma. 5 + \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 + 5 = 10$$

ΘΕΜΑ 3^ο:

α. Είναι $x^2 - 6x + 5$
 $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 36 - 20 = 16$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{6 \pm 4}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{6-4}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{6+4}{2} = 5 \end{cases}$$

οπότε $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$

$$\text{Άρα } k = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3(x-5)}{(x-5)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3}{x-1} = \frac{3}{5-1} = \frac{3}{4}$$

$$\beta. \text{ Άρα } X = \left\{ k, \frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right\} = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right\}$$

Επειδή $A \cap B \subseteq B$ θα είναι $P(A \cap B) \leq P(B)$

Επίσης $P(B)$, $P(A \cap B)$ ανήκουν στο X με $P(B) \neq P(A \cap B)$

$$\text{Άρα } P(B) = \frac{3}{4} \text{ και } P(A \cap B) = \frac{1}{2}$$

Καμία από τις παρακάτω πιθανότητες δεν μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{5}{4}$ γιατί $\frac{5}{4} > 1$ και γνωρίζουμε ότι: $0 \leq P(B) \leq 1$, $0 \leq P(A \cap B) \leq 1$

γ. i. Ισχύει: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$$\frac{7}{8} = P(A) + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A) = \frac{7}{8} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A) = \frac{7-6+4}{8} = \frac{5}{8}$$

ii. Ισχύει: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{5-4}{8} = \frac{1}{8}$

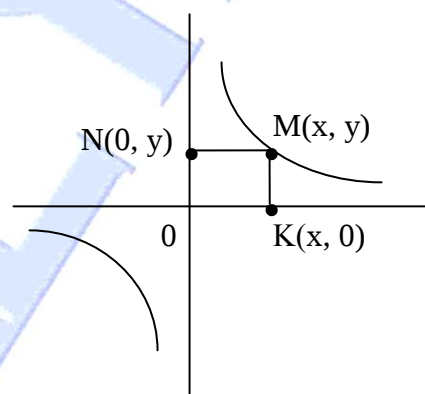
ΘΕΜΑ 4^ο:

α. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{(1)x - 1(x)'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}, x \in (0, +\infty)$$

$$f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1, \quad f(1) = 1$$

$$\varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = -1(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 1 + 1 \Leftrightarrow y = -x + 2$$



β. Η περίμετρος του ΟΚΜΝ είναι $20K + 20N = 2x + 2y$

Επειδή $M(x, y) \in C_f$ είναι $y = \frac{1}{x}$ άρα η περίμετρος είναι $2x + 2 \frac{1}{x}$ με $x > 0$

Έστω $g(x) = 2 \left(x + \frac{1}{x} \right)$, $x > 0$

$$g'(x) = 2 \left(x + \frac{1}{x} \right)' = 2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) = 2 \frac{x^2 - 1}{x^2}, x > 0$$

Ρίζες $g'(x)$: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \xRightarrow{x > 0} x = 1$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$		o.ε	↗

$$g(1) = 2(1 + 1) = 4$$

Για $x = 1$ είναι $y = \frac{1}{x}$ δηλαδή $y = 1$ άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M(1, 1)$

γ. Είναι $y = -x + 2$

$$\text{Άρα } \bar{y} = -\bar{x} + 2 \Rightarrow \bar{y} = -5 + 2 = -3$$

$$Sy = |-1| Sx \Rightarrow Sy = Sx = 2$$