

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2005
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1 Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και
- $f(α) \neq f(β)$

δείξτε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (α, β)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$. **Μονάδες 9**

A.2 Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ με $f(α) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (α, β)$ ώστε $g(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(β) > 0$. **Μονάδες 2**

β. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. **Μονάδες 2**

γ. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} . **Μονάδες 2**

δ. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ **Μονάδες 2**

ε. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ , τότε

ισχύει $\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x) - f(a)$ για κάθε $x \in \Delta$. **Μονάδες 2**

στ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ . **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

α. Δείξτε ότι: $\frac{\overline{z}}{z_1} = \frac{9}{z_1}$ **Μονάδες 7**

β. Δείξτε ότι ο αριθμός $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός. **Μονάδες 9**

γ. Δείξτε ότι $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{1}{3} |z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$ **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$.

α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 3

β. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y = \lambda e x$.

Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής M .

Μονάδες 7

γ. Δείξτε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , της εφαπτομένης της στο σημείο M και του άξονα $y'y$, είναι

$$E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$$

Μονάδες 8

δ. Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 E(\lambda)}{2 + \eta \mu \lambda}$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4°

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση

$2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in R$ και $f(0) = 0$.

α. Να δειχθεί ότι: $f(x) = \ln \left(\frac{1+e^x}{2} \right)$.

Μονάδες 6

β. Να βρεθεί το: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(x-t) dt}{\eta \mu x}$

Μονάδες 6

γ. Δίδονται οι συναρτήσεις

$$h(x) = \int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t) dt \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^{2007}}{2007}.$$

Δείξτε ότι $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in R$

Μονάδες 7

δ. Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t) dt = \frac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0, 1)$

Μονάδες 6

Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα 1^ο:

A1. Θεωρία: Απόδειξη θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών σελ. 194 σχολικό βιβλίο

A2. Θεωρία: ορισμός σελ. 280 σχολικό βιβλίο

B. α. Λ β. Λ γ. Σ δ. Σ ε. Λ στ. Σ

Θέμα 2^ο:

α. Από υπόθεση $|z_1| = 3 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 9 \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_1 = 9 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}$

Είναι $z_1 \neq 0$ γιατί $|z_1| \neq 3$

$$\bar{z}_1 = \frac{9}{z_1} \quad (1)$$

β. Από α) είναι

Από υπόθεση $|z_2| = 3 \Leftrightarrow |z_2|^2 = 9 \Leftrightarrow z_2 \bar{z}_2 = 9 \Leftrightarrow \bar{z}_2 = \frac{9}{z_2} \quad (2)$

Έστω $u = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$, αρκεί να δείξουμε ότι $\bar{u} = u$

$$\bar{u} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \right)} = \left(\overline{\frac{z_1}{z_2}} \right) + \left(\overline{\frac{z_2}{z_1}} \right) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} \stackrel{(1)}{=} \frac{\frac{9}{z_1}}{\frac{9}{z_2}} + \frac{\frac{9}{z_2}}{\frac{9}{z_1}} \stackrel{(2)}{=} \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_1}{z_2} = u$$

Έχουμε:

$$\text{Άρα } \bar{u} = u \Leftrightarrow u \in \mathbb{R}$$

γ. Είναι

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 + z_3| &= \left| \overline{z_1 + z_2 + z_3} \right| = \left| \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 \right| = \\ &= \left| \frac{9}{z_1} + \frac{9}{z_2} + \frac{9}{z_3} \right| = 9 \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right| = 9 \frac{|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3|}{|z_1| |z_2| |z_3|} \\ &= 9 \frac{|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3|}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3} |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3| \end{aligned}$$

Θέμα 3^ο:

α. Η f ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x) = \left(e^{\lambda x} \right)' = e^{\lambda x} (\lambda x)' = \lambda e^{\lambda x} > 0, \text{ διότι } e^{\lambda x} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } \lambda > 0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - e^{\lambda x_0} = \lambda e^{\lambda x_0}(x - x_0) \quad (1)$$

Επειδή διέρχεται από το $O(0, 0)$ θα έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow 0 - e^{\lambda x_0} = \lambda e^{\lambda x_0} (0 - x_0) \Leftrightarrow -e^{\lambda x_0} = -\lambda e^{\lambda x_0} x_0 \xRightarrow{e^{\lambda x_0} \neq 0} 1 = \lambda x_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{\lambda}$$

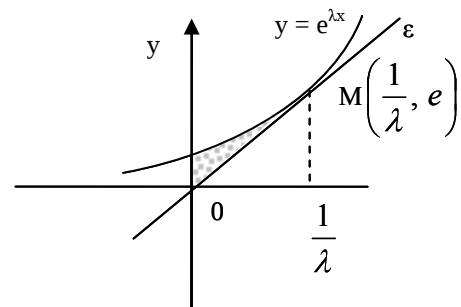
$$\text{Για } x_0 = \frac{1}{\lambda} \text{ είναι } f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = e^{\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} = e$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - e = \lambda e \left(x - \frac{1}{\lambda} \right) \Leftrightarrow y = \lambda e x - \lambda e \frac{1}{\lambda} + e \Leftrightarrow y = \lambda e x$$

Το σημείο επαφής είναι το $M\left(\frac{1}{\lambda}, e\right)$

$$\begin{aligned} \gamma. \text{ Είναι } E(\lambda) &= \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (e^{\lambda x} - \lambda e x) dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{\lambda x} dx - \lambda e \int_0^{\frac{1}{\lambda}} x dx = \left[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda} \right]_0^{\frac{1}{\lambda}} - \lambda e \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{\lambda}} = \\ &= \frac{e}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} - \lambda e \left(\frac{1}{2\lambda^2} - 0 \right) = \\ &= \frac{e}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} - \frac{e}{2\lambda} = \frac{2e - 2 - e}{2\lambda} = \frac{e - 2}{2\lambda} \\ \text{Άρα } E(\lambda) &= \frac{e - 2}{2\lambda} \end{aligned}$$



$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2 \frac{e - 2}{2\lambda}}{2 + \eta\mu\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(e - 2)}{2(2 + \eta\mu\lambda)} \stackrel{(\lambda > 0)}{=} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{e - 2}{\frac{2(2 + \eta\mu\lambda)}{\lambda}} \quad (2)$$

δ. Είναι

$$\text{Είναι } \left| \frac{2 + \eta\mu\lambda}{\lambda} \right| = \frac{|2 + \eta\mu\lambda|}{|\lambda|} \leq \frac{|2| + |\eta\mu\lambda|}{\lambda} = \frac{2 + |\eta\mu\lambda|}{\lambda} \leq \frac{2 + 1}{\lambda} = \frac{3}{\lambda}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{άρα } -\frac{3}{\lambda} &\leq \frac{2 + \eta\mu\lambda}{\lambda} \leq \frac{3}{\lambda} \\ \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3}{\lambda} \right) &= 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{\lambda} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{2 + \eta\mu\lambda}{\lambda} = 0 \quad (3)$$

$$\text{Επειδή } -1 \leq \eta\mu\lambda \leq 1 \text{ είναι } 2 + \eta\mu\lambda > 0 \text{ άρα } \frac{2 + \eta\mu\lambda}{\lambda} > 0 \quad (4)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2 E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{e - 2}{\frac{2(2 + \eta\mu\lambda)}{\lambda}} = +\infty$$

Από (2) λόγω των (3) και (4) είναι

Θέμα 4^ο:

α. Είναι: $2f'(x) = e^{x-f(x)} \Leftrightarrow 2f''(x) = \frac{e^x}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow 2f''(x) \cdot f^{f(x)} = e^x \Leftrightarrow$

$$f'(x) \cdot e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{e^x}{2} \right)' = \left(\frac{e^{f(x)}}{2} \right)' \Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + c \quad (1)$$

Για $x = 0 \Rightarrow e^{f(0)} = \frac{e^0}{2} + c \Leftrightarrow e^0 = \frac{e^0}{2} + c \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$

Για $c = \frac{1}{2}$ η (1) γίνεται $e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{e^x + 1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \ln \left(\frac{1 + e^x}{2} \right)$

β. Θέτω $x - t = u$, τότε

- $t = x - u$
- $dt = (x - u)' du = -du$
- Για $t = 0$ είναι $u = x$
- Για $t = x$ είναι $u = 0$

Άρα $\int_0^x f(x-t) dt = \int_x^0 f(u)(-du) = \int_0^x f(u) du$

Επομένως: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{\eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x f(u) du \right)'}{(\eta \mu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sigma \upsilon \nu x} = \frac{f(0)}{\sigma \upsilon \nu 0} = \frac{0}{1} = 0$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, διότι η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ επομένως και στο 0.

γ. $h(x) = \int_{-x}^0 t^{2005} f(t) dt + \int_0^x t^{2005} f(t) dt = -\int_0^{-x} t^{2005} f(t) dt + \int_0^x t^{2005} f(t) dt \quad (1)$

$$h'(x) = \left(-\int_0^{-x} t^{2005} f(t) dt \right)' + \left(\int_0^x t^{2005} f(t) dt \right)' =$$

$$= -(-x)^{2005} f(-x)(-1) + x^{2005} f(x) = -x^{2005} f(-x) + x^{2005} f(x) = x^{2005} [-f(-x) + f(x)] \quad (2)$$

$$\left(\frac{1+e^x}{2} \right) - \ln \left(\frac{1+e^{-x}}{2} \right) = \ln \frac{1+e^x}{1+e^{-x}} = \ln \frac{1+e^x}{e^x+1} =$$

Είναι $f(x) - f(-x) = \ln$

$$= \ln \frac{e^x(1+e^x)}{1+e^x} = \ln e^x = x$$

Η (2) γίνεται $h'(x) = x^{2005} \cdot x = x^{2006} \quad (3)$

$$g'(x) = \frac{1}{2007} \left(x^{2007} \right)' = \frac{1}{2007} 2007 x^{2006} = x^{2006}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Από (3) και (4) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι: $h'(x) = g'(x) \Leftrightarrow h(x) = g(x) + C \quad (5)$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Για } x = 0 \Rightarrow h(0) = g(0) + C \\ \text{Από (1) είναι } h(0) = 0 \\ \text{Επίσης } g(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 0 + C \Leftrightarrow C = 0$$

Για $C = 0$ η (5) γίνεται $h(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

δ. Από γ) είναι $\int_{-x}^x t^{2005} f(t) dt = g(x) = \frac{x^{2007}}{2007}$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\frac{x^{2007}}{2007} = \frac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$
Η εξίσωση γράφεται: $2008 x^{2007} = 2007 \Leftrightarrow 2008x^{2007} - 2007 = 0$

Θεωρώ την συνάρτηση $\Phi(x) = 2008 x^{2007} - 2007, x \in \mathbb{R}$

- Η Φ ως πολωνυμική είναι συνεχής στο $[0, 1]$
 - $\Phi(0) = -2007 < 0$
 - $\Phi(1) = 2008 - 2007 = 1 > 0$
- } $\Rightarrow \Phi(0) \cdot \Phi(1) < 0$

Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\Phi(x_0) = 0$

Εξετάζουμε την Φ ως προς την μονοτονία:

$$\Phi'(x) = (2008 x^{2007} - 2007)' = 2008 \cdot 2007 x^{2006} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Άρα η Φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Επομένως το x_0 είναι μοναδική ρίζα της $\Phi(x) = 0$ στο $(0, 1)$.