

ΤΡΙΤΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2004
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ είναι ίση με 0. **Μονάδες 8**

B. Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής X είναι αρνητικός αριθμός.

β. Στην κανονική κατανομή το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$,

όπου $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων και s η τυπική τους απόκλιση.

γ. Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα v_i μιας μεταβλητής X με το μέγεθος n του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i .

Μονάδες 6

Δ. Στον παρακάτω πίνακα τα A και B συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης. Στη **Στήλη I** αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα A και B διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα και στη **Στήλη II** σχέσεις διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης I** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης II** που αντιστοιχεί στην ίδια διατύπωση.

Στήλη I	Στήλη II
α. πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B	1. $A \cap B$
β. πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B	2. $A - B$
γ. πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B	3. $(A \cup B)'$
	4. $A \cup B$

Στη Στήλη II περισεύει μία σχέση.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 10

B. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 3^ο

Στην «Αττική οδό» εξυπηρετούνται καθημερινά 200 χιλιάδες οχήματα, τα οποία διανύουν από 5 έως 45 χιλιόμετρα. Η διανυόμενη απόσταση σε χιλιόμετρα από τα οχήματα αυτά παρουσιάζεται στην πρώτη στήλη του πίνακα:

Κλάσεις σε χιλιόμετρα	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα v_i σε χιλιάδες μονάδες	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα N_i σε χιλιάδες μονάδες	Αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i\%$
[5, 15)		60			
[15, 25)					68
[25, 35)				180	
[35, 45)					
Σύνολο		200			

Α. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τις τιμές των αντίστοιχων μεγεθών. **Μονάδες 10**

Β. Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα $(x_i, f_i\%)$ και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων. **Μονάδες 5**

Γ. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$.

Μονάδες 5

Δ. Να βρείτε το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + 10$.

Οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ δύο ενδεχομένων A και B ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ίσες με τις τιμές του x , στις οποίες η f έχει αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο.

Α. Να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$

Μονάδες 9

Β. Για τις παραπάνω τιμές των $P(A)$, $P(B)$ καθώς και για $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, να βρείτε τις πιθανότητες:

i. $P(A \cap B)$

ii. $P(A - B)$

iii. $P[(A \cap B)']$

iv. $P[(A - B) \cup (B - A)]$.

Μονάδες 16

Απαντήσεις

Θέμα 1^ο:

Α. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 28

Β. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 16

Γ. α. Λ β. Λ γ. Σ

Δ. $\alpha \rightarrow 4$ β $\rightarrow 2$ γ $\rightarrow 1$

Θέμα 2^ο:

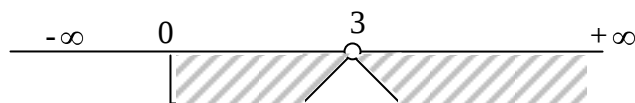
Α. Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει:

$$\sqrt{x} - \sqrt{3} \neq 0 \quad \text{και} \quad x \geq 0$$

$$\sqrt{x} \neq \sqrt{3}$$

$$x \neq 3$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = [0, 3) \cup (3, +\infty)$



Β. Είναι $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 4x + 3) = 9 - 12 + 3 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x} - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$

Μετατρέπω σε γινόμενο το τριώνυμο: $x^2 - 4x + 3$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ ή } x_2 = 3$$

$$\text{οπότε } x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{x^2-3^2}$$

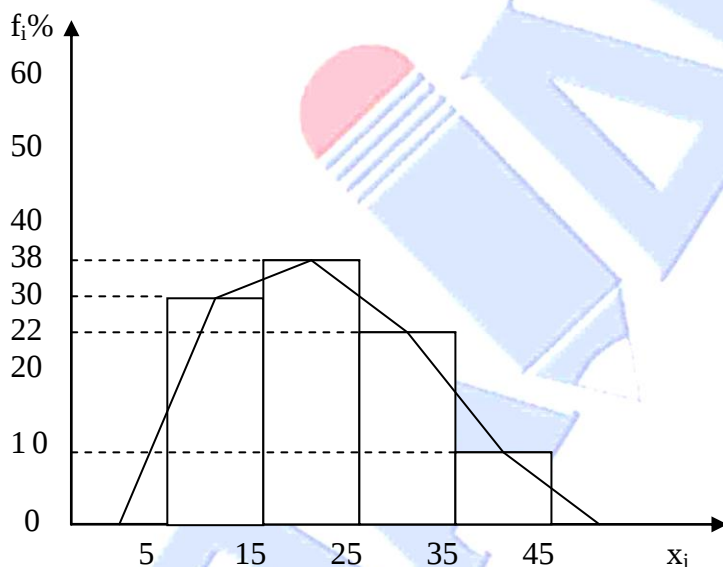
$$= \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{x-3} = (x-1)(\sqrt{x}+\sqrt{3})$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x-1)(\sqrt{x}+\sqrt{3}) = (3-1)(\sqrt{3}+\sqrt{3}) = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

Θέμα 3°

Κλάσεις σε χιλιόμετρα	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα n_i σε χιλιάδες μονάδες	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα N_i σε χιλιάδες μονάδες	Αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i\%$
[5, 15)	10	60	30	60	30
[15, 25)	20	76	38	136	68
[25, 35)	30	44	22	180	90
[35, 45)	40	20	10	200	100
Σύνολο		200	100		

B.



Ιστόγραμμα και πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

Γ. Είναι $\bar{x} = \sum_{i=1}^4 x_i f_i = 10 \cdot 0,3 + 20 \cdot 0,38 + 30 \cdot 0,22 + 40 \cdot 0,1 = 3 + 7,6 + 6,6 + 4 = 21,2$

Δ. Τα οχήματα που διανύουν απόσταση τουλάχιστο 25χιλ. είναι $44 + 20 = 64$ χιλιάδες

Θέμα 4°

$A_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 6x^2 - 5x + 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 = 0$

$\Delta = 25 - 24 = 1$

$$x_{42} = \frac{5 \pm 1}{12} \begin{cases} x_1 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f'(x)	+	-	+	
f(x)				

ΜΕΓΙΣΤΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ

Άρα για $x_1 = \frac{1}{3}$ η f παρουσιάζει μέγιστο και για $x_2 = \frac{1}{2}$ η f παρουσιάζει ελάχιστο.

Επομένως $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$

B. i) Ισχύει: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$
 $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Leftrightarrow$
 $P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

ii) Ισχύει: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

iii) Ισχύει: $P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

iv) Ισχύει: $P(A - B \cup B - A) = P(A - B) + P(B - A) =$
 $= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$
 $= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) =$
 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$