

ΠΕΜΠΤΗ 27 ΜΑΪΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$

Μονάδες 10

Β. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

Μονάδες 2

β. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$

Μονάδες 2

γ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(x_0)$

Μονάδες 2

δ. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 2

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο

$[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$

Μονάδες 2**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 \ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

Μονάδες 10

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(0)=f\left(\frac{3}{2}\right)=0$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -f(\xi)$.

Μονάδες 8

β. Εάν $f(x)=2x^2-3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(\alpha) = \int_{\alpha}^0 g(x) dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$ Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} I(\alpha)$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1)=1$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $g(x) = \int_1^{x^3} |z| f(t) dt - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (x-1) \geq 0$, όπου $z = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{IR}$ και να βρείτε τη g' .
Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι $|z| = \left| z + \frac{1}{z} \right|$

Μονάδες 8

γ. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος β να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$

Μονάδες 6

δ. Αν επιπλέον $f(2)=\alpha > 0$, $f(3)=\beta$ και $\alpha > \beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0)=0.$$

Μονάδες

6

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέμα 1°

A : Απόδειξη Θ. Fermat σελ. 260 σχολ. Βιβλίου

B : Ορισμός σελ. 213 σχολ. Βιβλίου

Γ : α : Σ β : Σ γ : Λ δ : Λ ε : Σ

Θέμα 2°

α. $f(x) = x^2 \ln x$

Για να ορίζετε η f πρέπει $x > 0$, άρα $A_f = (0, +\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = (x^2)' \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$$

Έχουμε $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x(2 \ln x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$$2 \ln x \geq -1 \Leftrightarrow \ln x \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{\sqrt{e}}$$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
$f'(x)$	/	0	+
$f(x)$	/	ελάχιστο	/

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$

Η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$

$$\begin{aligned} \beta. f''(x) &= (2x \ln x + x)' = (2x)' \ln x + 2x(\ln x)' + (x)' = \\ &= 2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 2 \ln x + 2 + 1 = 2 \ln x + 3, \quad x \in (0, +\infty) \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \ln x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

x	0	$\frac{1}{e\sqrt{e}}$	$+\infty$
$f'(x)$	/	0	+
$f(x)$	/	Σ. Κ.	/

Η f είναι κοίλη στο $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ και είναι κυρτή στο $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$.

Η C_f έχει σημείο καμπής το $A\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\right)$

$$\text{είναι } f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e^3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2e^3}$$

$$\text{Άρα Σ.Κ. το } A\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$$

γ. $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right] = A_1$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ οπότε το σύνολο τιμών είναι το $f(A_1) = \left[-\frac{1}{2e}, \infty\right)$ όπου $\kappa = f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$ και $\lambda = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0$. $-\infty$ προσδ. μορφή

$$\text{οπότε } \lambda = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{2} x^2\right) = 0$$

$$\text{Άρα } f(A_1) = \left[-\frac{1}{2e}, 0\right)$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$ οπότε το σύνολο τιμών είναι το :

$$f(A_2) = \left[-\frac{1}{2e}, \infty\right) \text{ όπου } \mu = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e} \text{ και } \nu = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \ln x = +\infty,$$

$$\text{οπότε } f(A_2) = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right)$$

$$\text{Άρα } f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left[-\frac{1}{2e}, 0\right) \cup \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right) = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right)$$

Θέμα 3^ο

α. $g(x) = e^x \cdot f(x)$

Εξετάζουμε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την g στο $\left[0, \frac{3}{2}\right]$

- Η g είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\text{με } g'(x) = (e^x \cdot f(x))' = (e^x)' f(x) + e^x \cdot f'(x) = e^x f(x) + e^x \cdot f'(x) = e^x [f(x) + f'(x)] \quad (1)$$

$$\bullet \text{ Είναι } \left. \begin{aligned} g(0) &= e^0 \cdot f(0) = 0 \\ g\left(\frac{3}{2}\right) &= e^{3/2} \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(0) = g\left(\frac{3}{2}\right)$$

Άρα σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} e^{\xi} (f(\xi) + f'(\xi)) \stackrel{e^{\xi} \neq 0}{=} 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = -f(\xi)$$

β. Αν $f(x) = 2x^2 - 3x$, τότε $g(x) = e^x(2x^2 - 3x)$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } I(\alpha) &= \int_{\alpha}^0 e^x (2x^2 - 3x) dx = \int_{\alpha}^0 (e^x)' (2x^2 - 3x) dx = \\ &= \left[x(2x^2 - 3x) \right]_{\alpha}^0 - \int_{\alpha}^0 e^x (2x^2 - 3x)' dx = \\ &= \left[x(2x^2 - 3x) \right]_{\alpha}^0 - \int_{\alpha}^0 e^x (4x - 3) dx = \\ &= \left[x(2x^2 - 3x) \right]_{\alpha}^0 - \left[x(4x - 3) \right]_{\alpha}^0 + \int_{\alpha}^0 e^x (4x - 3)' dx = \\ &= \left[x(2x^2 - 3x) \right]_{\alpha}^0 - \left[x(4x - 3) \right]_{\alpha}^0 + \int_{\alpha}^0 e^x 4 dx = \\ &= \left[x(2x^2 - 3x) \right]_{\alpha}^0 - \left[x(4x - 3) \right]_{\alpha}^0 + 4 \left[x \right]_{\alpha}^0 = \\ &= -e^{\alpha} (2\alpha^2 - 3\alpha) - e^0 (-3) + e^{\alpha} (4\alpha - 3) + 4e^0 - 4e^{\alpha} = \\ &= -e^{\alpha} (2\alpha^2 - 3\alpha) + 3 + 4\alpha e^{\alpha} - 3e^{\alpha} + 4 - 4e^{\alpha} = \\ &= -2\alpha^2 e^{\alpha} + 3\alpha e^{\alpha} + 4\alpha e^{\alpha} - 7e^{\alpha} + 7 = \\ &= -2\alpha^2 e^{\alpha} + 7\alpha e^{\alpha} - 7e^{\alpha} + 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma. \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} I(\alpha) &\stackrel{\beta)}{=} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} (-2\alpha^2 e^{\alpha} + 7\alpha e^{\alpha} - 7e^{\alpha} + 7) = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \left[\alpha(-2\alpha^2 + 7\alpha - 7) + 7 \right] \\ \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \left[\alpha \cdot (-2\alpha^2 + 7\alpha - 7) \right] &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{-2\alpha^2 + 7\alpha - 7}{e^{-\alpha}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{-2\alpha^2 + 7\alpha - 7}{e^{-\alpha}} = \\ \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{-4\alpha + 7}{-e^{-\alpha}} &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{-4\alpha + 7}{e^{-\alpha}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{-4}{e^{-\alpha}} = 0 \\ \text{Από (1) είναι } \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} I(\alpha) &= 0 + 7 = 7 \end{aligned}$$

Θέμα 4ο:

$$\text{Έστω } h(x) = \int_1^x |z| f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

Επειδή η συνάρτηση $|z| \cdot f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ η $h(x)$ είναι παράγουσα της $|z| \cdot f(x)$ επομένως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = |z| \cdot f(x)$.

Είναι $\int_1^{x^3} |z| f(t) dt = h(x^3)$ η οποία ως σύνθεση των παραγωγίσιμων $h(x)$ και x^3 είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η $g(x)$ ως άθροισμα των παραγωγίσιμων $h(x^3)$ και $3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (x-1)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = |z| f(x^3) (x^3)' - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| = 3x^2 |z| f(x^3) - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right|$

β) Εξετάζουμε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Fermat

- Από υπόθεση $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) \geq 0$

$$\text{Παρατηρούμε ότι } g(1) = \int_1^1 |z| f(t) dt - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (1-1) = 0 - 0 = 0$$

$$\text{άρα } \forall x \in \mathbb{R} \text{ είναι } g(x) \geq g(1)$$

Επομένως στο $x_0 = 1$ η $g(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο το $g(1)$

- Από α) η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

Από θεώρημα Fermat είναι

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow 3|z| f(1) - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| = 0 \Leftrightarrow 3|z| = 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| \Leftrightarrow |z| = \left| z + \frac{1}{z} \right|$$

$$\begin{aligned} \gamma) \text{ Από β) είναι } |z| &= \left| z + \frac{1}{z} \right| \Leftrightarrow |z|^2 = \left| z + \frac{1}{z} \right|^2 \Leftrightarrow z\bar{z} = \left(z + \frac{1}{z} \right) \overline{\left(z + \frac{1}{z} \right)} \\ &\Leftrightarrow z\bar{z} = \left(z + \frac{1}{z} \right) \left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right) \Leftrightarrow z\bar{z} = z\bar{z} + \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} + \frac{1}{z\bar{z}} \Leftrightarrow 0 = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} + \frac{1}{z\bar{z}} \Leftrightarrow 0 = z^2 + \bar{z}^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow 0 = 2 \operatorname{Re}(z^2) + 1 \Leftrightarrow 2 \operatorname{Re}(z^2) = -1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

δ) Από γ) είναι

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2} &\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) < 0 \\ &\begin{matrix} \alpha > \beta \\ \Rightarrow \alpha + \beta < 0 \end{matrix} \Rightarrow \beta < -\alpha \begin{matrix} \alpha > 0 \\ \Rightarrow \beta < 0 \end{matrix} \end{aligned}$$

Επειδή f συνεχής στο $[2, 3]$ και $f(2) f(3) = \alpha \cdot \beta < 0$

Από θεώρημα Bolzano $\exists x_0 \in (2, 3) : f(x_0) = 0$