

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ.Π.

ΘΕΜΑ 1ο

- A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$. **Μονάδες 8**
- B. Πότε μια συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα; **Μονάδες 6**
- Γ. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων. **Μονάδες 6**
- Δ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α. Το εύρος είναι μέτρο θέσης.
- β. Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.
- γ. Ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.
- δ. Δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \emptyset$.
- ε. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση των ποσοτικών μεταβλητών. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 2ο

Στο σύλλογο καθηγητών ενός λυκείου το 55% είναι γυναίκες, το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε τυχαία έναν καθηγητή για να εκπροσωπήσει το σύλλογο σε κάποια επιτροπή.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:

- α. γυναίκα ή φιλόλογος
β. γυναίκα και όχι φιλόλογος
γ. άνδρας και φιλόλογος
δ. άνδρας ή φιλόλογος.

Μονάδες 5
Μονάδες 5
Μονάδες 7
Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

- A. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο:

- α. $\mathbb{R}$ β. $(-1, 1)$ γ. $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ δ. $(1, +\infty)$

Μονάδες 5

- B. Να αποδείξετε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 7

- Γ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} [(x+1) \cdot f(x)]$

Μονάδες 6

- Δ. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(0))$ με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η χρηματική παροχή από τους γονείς, σε Ευρώ, δείγματος έξι μαθητών της πρώτης τάξης (ομάδα A) και έξι μαθητών της δεύτερης τάξης (ομάδα B) ενός Γυμνασίου.

Ομάδα A	Ομάδα B
1	7
8	14
9	6
5	4
3	12
4	5

- α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε ομάδας. **Μονάδες 6**

- β. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες. **Μονάδες 5**

- γ. Αν σε κάθε παρατήρηση της ομάδας A, γίνει αύξηση 20% και οι παρατηρήσεις της ομάδας B αυξηθούν κατά 5 € η κάθε μία, πώς διαμορφώνονται οι νέες μέσες τιμές των δύο ομάδων;

Μονάδες 8

- δ. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες με τα νέα δεδομένα.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1^ο

Α. Σχολ. Σελ. 28 Β. Σχολ. Σελ. 13 Γ. Σχολ. Σελ. 89 Δ. α.(Λ) β.(Λ) γ.(Σ) δ.(Σ) ε. (Λ)

Θέμα 2^ο

Έστω τα ενδεχόμενα:

Γ: «Ο καθηγητής είναι γυναίκα» Φ: «Ο καθηγητής είναι φιλόλογος» Α: «Ο καθηγητής είναι άνδρας»

$$P(\Gamma) = \frac{55}{100}, P(\Phi) = \frac{40}{100}, P(A) = \frac{45}{100}, P(\Gamma \cap \Phi) = \frac{30}{100}$$

$$\alpha. P(\Gamma \cup \Phi) = P(\Gamma) + P(\Phi) - P(\Gamma \cap \Phi) = \frac{55}{100} + \frac{40}{100} - \frac{30}{100} = \frac{65}{100} = 65\%$$

$$\beta. P(\Gamma - \Phi) = P(\Gamma) - P(\Gamma \cap \Phi) = \frac{55}{100} - \frac{30}{100} = \frac{25}{100} = 25\%$$

$$\gamma. P(A \cap \Phi) = \frac{10}{100}$$

$$\delta. P(A \cup \Phi) = P(A) + P(\Phi) - P(A \cap \Phi) = \frac{45}{100} + \frac{40}{100} - \frac{10}{100} = \frac{75}{100}$$

Θέμα 3^ο

Α. Για να ορίζεται η f στο R πρέπει: $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$ $A = R - \{\pm 1\}$ Άρα το γ.

Β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ως ρητή συνάρτηση με

$$f'(x) = \frac{x'(x^2 - 1) - x(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 - 1 - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} < 0$$

Άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in A$

$$\Gamma. \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{1}{x+1} f(x) \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{1}{x+1} \cdot \frac{x}{x^2 - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{1}{x+1} \cdot \frac{x}{(x+1)(x-1)} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1} = \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2}$$

Δ. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο σημείο (0, f(0)) είναι:

$$f'(0) = \frac{-(0^2 + 1)}{(0^2 - 1)^2} = -1 \quad \text{Είναι } \lambda = \varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = -1 \Leftrightarrow \omega = \frac{3\pi}{4}$$

Θέμα 4^ο

$$\alpha. \bar{x}_A = \frac{1+8+9+5+3+4}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

$$\delta_{A(v=\text{άρτιος})} = \frac{\frac{x_v + x_{v+1}}{2}}{2} = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{4+5}{2} = 4,5$$

$$\bar{x}_B = \frac{4+5+6+7+12+14}{6} = \frac{48}{6} = 8$$

$$\delta_{B(v=\text{άρτιος})} = \frac{\frac{x_v + x_{v+1}}{2}}{2} = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{6+7}{2} = 6,5$$

x_A	x_B
1	4
3	5
4	6
5	7
8	12
9	14

$$\beta. \quad s_A^2 = \frac{1}{v} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{6} [(-5)^2 + (-6)^2 + (-4)^2 + (-6)^2 + (-5)^2 + (-4)^2] =$$

$$= \frac{1}{6} [6 + 4 + 1 + 9 + 16] = \frac{46}{6} = \frac{23}{3} \quad \text{άρα } s_A = \sqrt{\frac{23}{3}}$$

$$s_B^2 = \frac{1}{v} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{6} [(-4)^2 + (-6)^2 + (-6)^2 + (-8)^2 + (-2)^2 + (-4)^2] =$$

$$= \frac{1}{6} [6 + 9 + 4 + 1 + 16 + 36] = \frac{82}{6} = \frac{41}{3} \quad \text{άρα } s_B = \sqrt{\frac{41}{3}}$$

$$C_{V_A} = \frac{s_A}{|\bar{x}_A|} = \frac{\sqrt{\frac{23}{3}}}{5} = \frac{\sqrt{23}}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{23}\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{69}}{15}$$

$$C_{V_B} = \frac{s_B}{|\bar{x}_B|} = \frac{\sqrt{\frac{41}{3}}}{8} = \frac{\sqrt{41}}{8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{41}\sqrt{3}}{8\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{123}}{8 \cdot 3} = \frac{\sqrt{123}}{24}$$

$$CV_A > CV_B \Leftrightarrow \frac{\sqrt{69}}{15} > \frac{\sqrt{123}}{24} \Leftrightarrow 24\sqrt{69} > 15\sqrt{123} \Leftrightarrow \sqrt{69 \cdot 24^2} > \sqrt{123 \cdot 15^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{69 \cdot 576} > \sqrt{123 \cdot 225} \Leftrightarrow 39744 > 27675$$

Άρα $CV_A > CV_B$. Άρα το B δείγμα πιο ομοιογενές.

$$\gamma. \quad \psi_A = x_A + \frac{20}{100} x_A = \left(1 + \frac{20}{100}\right) x_A = 1,20 x_A, \quad s_A' = 1,20 \cdot s_A$$

$$\psi_B = x_B + 5, \quad s_B' = s_B$$

$$\bar{\psi}_A = 1,20 \cdot \bar{x}_A = 1,20 \cdot 5 = 6$$

$$\bar{\psi}_B = \bar{x}_B + 5 = 8 + 5 = 13$$

$$\delta. \quad CV_A' = \frac{s_A'}{|\bar{\psi}_A|} = \frac{1,20 s_A}{6} = 0,2 s_A = \frac{0,2\sqrt{23}}{\sqrt{3}} = \frac{0,2\sqrt{23}\sqrt{3}}{3} = \frac{0,2\sqrt{69}}{3}$$

$$CV_B' = \frac{s_B'}{|\bar{\psi}_B|} = \frac{s_B}{13} = \frac{\sqrt{123}}{24 \cdot 13} = \frac{\sqrt{123}}{312}$$

Άρα $CV_B' < CV_A'$ άρα πάλι η B ομάδα έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια.