

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
2003

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **Μονάδες 8**

B. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού; **Μονάδες 7**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z| = |\bar{z}| = |-z|$ **Μονάδες 2**

β. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ . **Μονάδες 2**

γ. Για κάθε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , ισχύει $\int f'(x)dx = f(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ **Μονάδες 2**

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση. **Μονάδες 2**

ε. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0 . **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $w = 3z - i\bar{z} + 4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z .

α. Να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4$ $\operatorname{Im}(w) = 3\beta - \alpha$. **Μονάδες 6**

β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$. **Μονάδες 9**

γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z , οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$, έχει το ελάχιστο μέτρο. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση. **Μονάδες 6**

β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 6**

γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0,0)$ είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} . **Μονάδες 5**

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση $x = 3$. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β) . Αν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma \in (\alpha, \beta)$, $\delta \in (\alpha, \beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$, να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (α, β) . **Μονάδες 8**

β. Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$. **Μονάδες 9**

γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f . **Μονάδες 8**

Απαντήσεις

Θέμα 1ο:

A. Θεώρημα: Απόδειξη σελ. 217 σχολικού βιβλίου

B. Σελ. 247 Σχολικού βιβλίου

Γ. α) Σ

β) Σ

γ) Σ

δ) Λ

ε) Λ

Θέμα 2^ο:

A. $z = \alpha + \beta i$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$w = 3z - iz + 4 = 3(\alpha + \beta i) - i(\alpha - \beta i) + 4 = 3\alpha + \beta i - \alpha i + \beta i^2 + 4 = (3\alpha - \beta + 4) + i(3\beta - \alpha)$$

Άρα $\text{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4$ και $\text{Im}(w) = 3\beta - \alpha$

B. Επειδή $M(w) \in (\varepsilon)$: $y = x - 12$

$$\Leftrightarrow 3\beta - \alpha = 3\alpha - \beta + 4 - 12 \Leftrightarrow -\alpha - 3\alpha + 3\beta + \beta = -8$$

$$\Leftrightarrow -4\alpha + 4\beta = -8 \Leftrightarrow -4(\alpha - \beta) = -8$$

$$\Leftrightarrow \alpha - \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = \alpha - 2$$

Άρα $P(z) = (\alpha, \beta)$ ανήκουν στην (ε') : $\psi = x - 2$

Γ. $z = x + \psi i = x + (x - 2)i$

$$|z| = \sqrt{x^2 + (x - 2)^2} = \sqrt{x^2 + x^2 + 4 - 4x} = \sqrt{2x^2 - 4x + 4}, x \in \mathbb{R}$$

Βρίσκουμε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $2x^2 - 4x + 4$

Έστω $f(x) = 2x^2 - 4x + 4$, $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 4x - 4 = 4(x - 1)$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 4(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	-	+	
f		↘ ↗	

ο.ε

$$f(1) = 2 - 4 + 4 = 2$$

Άρα ο ζητούμενος μιγαδικός είναι $z = x + (x - 2)i \stackrel{x=1}{=} 1 - i$

Θέμα 3^ο:

α. $f(x) = x^5 + x^3 + x$, $A_f = \mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση με

$$f'(x) = (x^5 + x^3 + x)' = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ άρα } f \uparrow \text{ στο } \mathbb{R}$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$$f''(x) = (5x^4 + 3x^2 + 1)' = 20x^3 + 6x = 2x(10x^2 + 3)$$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x(10x^2 + 3) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''(x)	-	+	
f(x)		↘ ↗	

Άρα η f είναι κυρτή για κάθε $x \in [0, +\infty)$
 και κοίλη για κάθε $x \in (-\infty, 0]$

Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνάρτηση « 1 - 1 » οπότε έχει αντίστροφη συνάρτηση

β. $f(e^x) \geq f(1+x) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} e^x \geq 1+x$

Έστω $h(x) = e^x - 1 - x$, $A_h = \mathbb{R}$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = (e^x - 1 - x)' = e^x - 1$$

$$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h'(x)	-	+	
h(x)		↘ ↗	

ο.ε

Άρα η h έχει στο $x_0 = 0$ ελάχιστο το $h(0) = 0$.

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει:

$$h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow e^x - 1 - x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1$$

γ. Είναι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 0 + 0 + 1 = 1$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $O(0, 0)$ είναι

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x$$

Άρα η εφαπτομένης της C_f στο $O(0, 0)$ είναι άξονας συμμετρίας των $C_f, C_{f^{-1}}$

δ. Βρίσκω που η $C_{f^{-1}}$ τέμνει τον x' α

Έστω ότι τον τέμνει στο $(\alpha, 0)$ τότε $f^{-1}(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(0) = \alpha \Leftrightarrow 0 = \alpha$

Βρίσκουμε το A_f όταν $A_{f^{-1}}$ είναι το $[0, 3]$

Έστω $A_f = [\kappa, \lambda]$ τότε επειδή η f στο $[\kappa, \lambda]$ είναι $f(A) = [f(\kappa), f(\lambda)]$

$$\text{άρα } [f(\kappa), f(\lambda)] = [0, 3] \text{ δηλαδή έχω: } \begin{cases} f(\kappa) = 0 \Leftrightarrow f(\kappa) = f(0) \Leftrightarrow \kappa = 0 \\ \text{και} \\ f(\lambda) = 3 \Leftrightarrow f(\lambda) = f(1) \Leftrightarrow \lambda = 1 \end{cases}$$

Είναι $A_f = [0, 1]$ άρα το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το $[0, 1]$

$$\text{άρα } f^{-1}(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 3] \quad \text{Επομένως } E = \int_0^3 |f^{-1}(x)| dx = \int_0^3 f^{-1}(x) dx$$

Θέτουμε $f^{-1}(x) = u$ τότε $x = f(u)$

- $dx = f'(u)du$
- Για $x = 0$ είναι $u = f^{-1}(0) \Leftrightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow f(u) = f(0) \Leftrightarrow u = 0$
- Για $x = 3$ είναι $u = f^{-1}(3) \Leftrightarrow f(u) = 3 \Leftrightarrow f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1$

$$\text{Είναι } E = \int_0^1 u f'(u) du = \int_0^1 u(5u^4 + 3u^2 + 1) du = \int_0^1 (5u^5 + 3u^3 + u) du =$$

$$= 5 \left[\frac{u^6}{6} \right]_0^1 + 3 \left[\frac{u^4}{4} \right]_0^1 + \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{6} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{25}{12} \text{ τ.μονάδες}$$

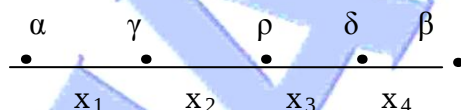
Θέμα 4ο

α) Θα δείξουμε ότι $\gamma \neq \delta$, έστω ότι $\gamma = \delta$ τότε $f(\gamma) = f(\delta)$ και $f(\gamma) \cdot f(\delta) = [f(\gamma)]^2 \geq 0$ άτοπο, διότι $f(\gamma) f(\delta) < 0$, άρα $\gamma \neq \delta$

Έστω $\gamma < \delta$

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ άρα και στο $[\gamma, \delta] \subset [\alpha, \beta]$ } $\text{BOLZANO} \Rightarrow \exists \rho \in (\gamma, \delta) \subset (\alpha, \beta) : f(\rho) = 0$
 $f(\gamma) f(\delta) < 0$

β)



- Από Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha, \gamma]$ $\exists x_1 \in (\alpha, \gamma) : f'(x_1) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha}$
- Από Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\gamma, \rho]$ $\exists x_2 \in (\gamma, \rho) : f'(x_2) = \frac{f(\rho) - f(\gamma)}{\rho - \gamma} = \frac{-f(\gamma)}{\rho - \gamma}$
- Από Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\rho, \delta]$ $\exists x_3 \in (\rho, \delta) : f'(x_3) = \frac{f(\delta) - f(\rho)}{\delta - \rho} = \frac{f(\delta)}{\delta - \rho}$
- Από Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\delta, \beta]$ $\exists x_4 \in (\delta, \beta) : f'(x_4) = \frac{f(\beta) - f(\delta)}{\beta - \delta} = \frac{-f(\delta)}{\beta - \delta}$

Από Θ.Μ.Τ. για την f' στο $[x_1, x_2]$

$$\exists \xi_1 \in (x_1, x_2) : f''(\xi_1) = \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \left[\frac{-f(\gamma)}{\rho - \gamma} - \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} \right]$$

$$\stackrel{C}{=} \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \left[\frac{-f(\gamma)}{\rho - \gamma} - \frac{f(\gamma)}{\gamma - \alpha} \right] = \frac{-f(\gamma)}{x_2 - x_1} \cdot \left[\frac{1}{\rho - \gamma} + \frac{1}{\gamma - \alpha} \right] = \kappa \cdot f(\gamma)$$

$$\mu\epsilon \kappa = \frac{-1}{x_2 - x_1} \cdot \left[\frac{1}{\rho - \gamma} + \frac{1}{\gamma - \alpha} \right] < 0$$

Από Θ.Μ.Τ. για την f' στο $[x_3, x_4]$

$$\exists \xi_2 \in (x_3, x_4) : f''(\xi_2) = \frac{f'(\xi_4) - f'(\xi_3)}{x_4 - x_3} = \frac{1}{x_4 - x_3} \cdot [f'(\xi_4) - f'(\xi_3)]$$

$$= \frac{1}{x_4 - x_3} \cdot \left[\frac{-f(\xi_4)}{\beta - \delta} - \frac{f(\xi_3)}{\delta - \rho} \right] = \frac{-f(\xi_4)}{x_4 - x_3} \cdot \left[\frac{1}{\beta - \delta} + \frac{1}{\delta - \rho} \right] = \lambda \cdot f(\xi_4)^{**}$$

$$\mu\epsilon \lambda = \frac{-1}{x_4 - x_3} \cdot \left[\frac{1}{\beta - \delta} + \frac{1}{\delta - \rho} \right] < 0$$

$$\text{Από}(*), (**) \Rightarrow f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) = \kappa \cdot \lambda \cdot f(\xi_4) \cdot f(\xi_4)^{**} < 0 \text{ άρα } \begin{cases} f''(\xi_1) < 0 \text{ και } f''(\xi_2) > 0 \\ \text{ή} \\ f''(\xi_1) > 0 \text{ και } f''(\xi_2) < 0 \end{cases}$$

γ) Επειδή $f'(x)$ συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και $f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) < 0$ από Θ. Bolzano
 υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\xi_1, \xi_2) : f''(x_0) = 0$

Αρκεί να δείξουμε ότι η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0

Έστω η $f''(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 τότε:

- $f''(x) \geq 0$ (με την f'' να μηδενίζεται σε πεπερασμένο αριθμό σημείων)
- $f''(x) \leq 0$ (με την f'' να μηδενίζεται σε πεπερασμένο αριθμό σημείων)
- $f''(x) = 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

i. Αν η $f''(x) \geq 0$ ή $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$ τότε η f' είναι γνησίως μονότονη άρα η $f'(x)$ έχει το πολύ μια ρίζα, άτοπο γιατί από το β) η $f'(x)$ έχει 2 τουλάχιστον ρίζες $n_1 \in (\alpha, \rho)$ και $n_2 \in (\rho, \beta)$ αφού ισχύει το Θ. Rolle για την f στο $[\alpha, \rho]$ και $[\rho, \beta]$

ii. Αν $f''(x) = 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

Τότε η f' είναι σταθερή και επειδή $f'(x_1) = 0$ θα είναι $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

άρα η f θα είναι σταθερή, άτοπο διότι $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$

Επομένως η $f''(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και επομένως το x_0 είναι σημείο καμπής.