



www.ekpaideysh.gr

εκπαίδευση
ΒΕΡΓΙΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΘΗΝΑ: ΚΥΨΕΛΗΣ 47 & ΣΠΕΤΣΟΠΟΥΛΑΣ 11 ☎ 210 8254700 📠 210 8254700
ΑΛΙΜΟΣ: ΘΟΥΚΥΔΙΔΟΥ 47 (3ος ΟΡΟΦΟΣ) ☎ 210 9824543 📠 210 9824543

ΘΕΜΑ Α

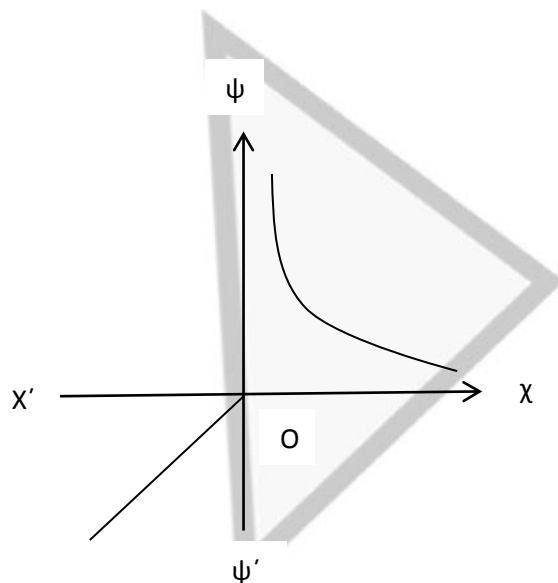
A1.

Βιβλίο Οργανισμού σελίδα 99

A2.

α. Ψευδής

β. Αντιπαράδειγμα από το διπλανό σχήμα.



A3.

Βιβλίο Οργανισμού σελίδα 216

A4.

α. Λ

β. Λ

γ. Σ

δ. Σ

ε. Σ

εκπαίδευση
ΒΕΡΓΙΟΠΟΥΛΟΣ

Θέμα Β

$$f(x) = x - \frac{4}{x^2}, \quad x \neq 0$$

B1)

- Η f συνεχής στο A_f ως πράξη συνεχών.
- Η f παρ/μη στο A_f ως πράξη παραγωγίσιμων με
- $f'(x) = (x)' - \left(\frac{4}{x^2}\right)' = 1 - \frac{(4)'x^2 - (x^2)'4}{x^4} = 1 - \frac{-8x}{x^4} = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3+8}{x^3} = \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^3}$
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$
- Η $f'(x)$ συνεχής ως πράξη συνεχών στο $\mathbb{R}^*$
- Η $f'(x)$ παρ/μη ως πράξη παραγωγίσιμων στο $\mathbb{R}^*$ με

B2)

$$f''(x) = \frac{(x^3+8)'x^3 - (x^3)'(x^3+8)}{x^6} = \frac{3x^2x^3 - 3x^2(x^3+8)}{x^6} = \frac{3x^5 - 3x^5 - 24x^2}{x^6} = \frac{-24x^2}{x^6} = \frac{-24}{x^4} < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

- Άρα η f κοίλη στο $\mathbb{R}^*$ και δεν έχει σημεία καμπής.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3-4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-4}{x^3} \stackrel{DLH}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot 3}{3x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{4}{x^2} - x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{4}{x^2}\right) = -4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Άρα πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ η (ε_1) : $\psi = x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3-4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-4}{x^3} \stackrel{DLH}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \cdot 3}{3x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{4}{x^2} - x\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{4}{x^2}\right) = -4 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Άρα η (ε_1) είναι πλάγια ασύμπτωτη και στο $-\infty$.



www.ekpaideysh.gr

εκπαίδευση
ΒΕΡΓΙΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΘΗΝΑ: ΚΥΨΕΛΗΣ 47 & ΣΠΕΤΣΟΠΟΥΛΑΣ 11
ΑΛΙΜΟΣ: ΘΟΥΚΥΔΙΔΟΥ 47 (3ος ΟΡΟΦΟΣ)

210 8254700 210 8254700
210 9824543 210 9824543

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x^3(x+2) > 0$$

X	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
x^3	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+
Γ	+	-	+	+

X	$-\infty$	-2	0	$\sqrt[3]{4}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	-	-	-	-
$f'(x)$	+	0	-	+	+
$f(x)$	$\nearrow$ -	-3	$\searrow$ -	$\nearrow$ 0	$\searrow$ +

τ.μ.

Η $f(x)$ στη θέση $x_0 = -2$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή ίση με

$$f(-2) = -2 - \frac{4}{(-2)^2} = -2 - \frac{4}{4} = -2 - 1 = -3$$

B3)

Αρα $f(x) \leq f(-2) = -3$ άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, \sqrt[3]{4})$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{4}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4}{x^2} \xrightarrow[+\infty]{(-\infty) D.L.H} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{4}{x^2} \right) = +\infty - 0 = +\infty$$

εκπαίδευση
ΒΕΡΓΙΟΠΟΥΛΟΣ



www.ekpaideysh.gr

ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ
ΒΕΡΓΙΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΘΗΝΑ: ΚΥΨΕΛΗΣ 47 & ΣΠΕΤΣΟΠΟΥΛΑΣ 11 ☎ 210 8254700 📠 210 8254700
ΑΛΙΜΟΣ: ΘΟΥΚΥΔΙΔΟΥ 47 (3ος ΟΡΟΦΟΣ) ☎ 210 9824543 📠 210 9824543

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - \frac{4}{x^2}\right) = 0 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{4}{x^2}\right) = 0 - \infty = -\infty$$

Άρα ο ψ' κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Πρόσημο της f

Έστω $\Delta_1 = (-\infty, -2]$, f γνησίως αύξουσα και συνεχής στο Δ_1 , άρα
 $f(\Delta_1) = (-\infty, -3]$

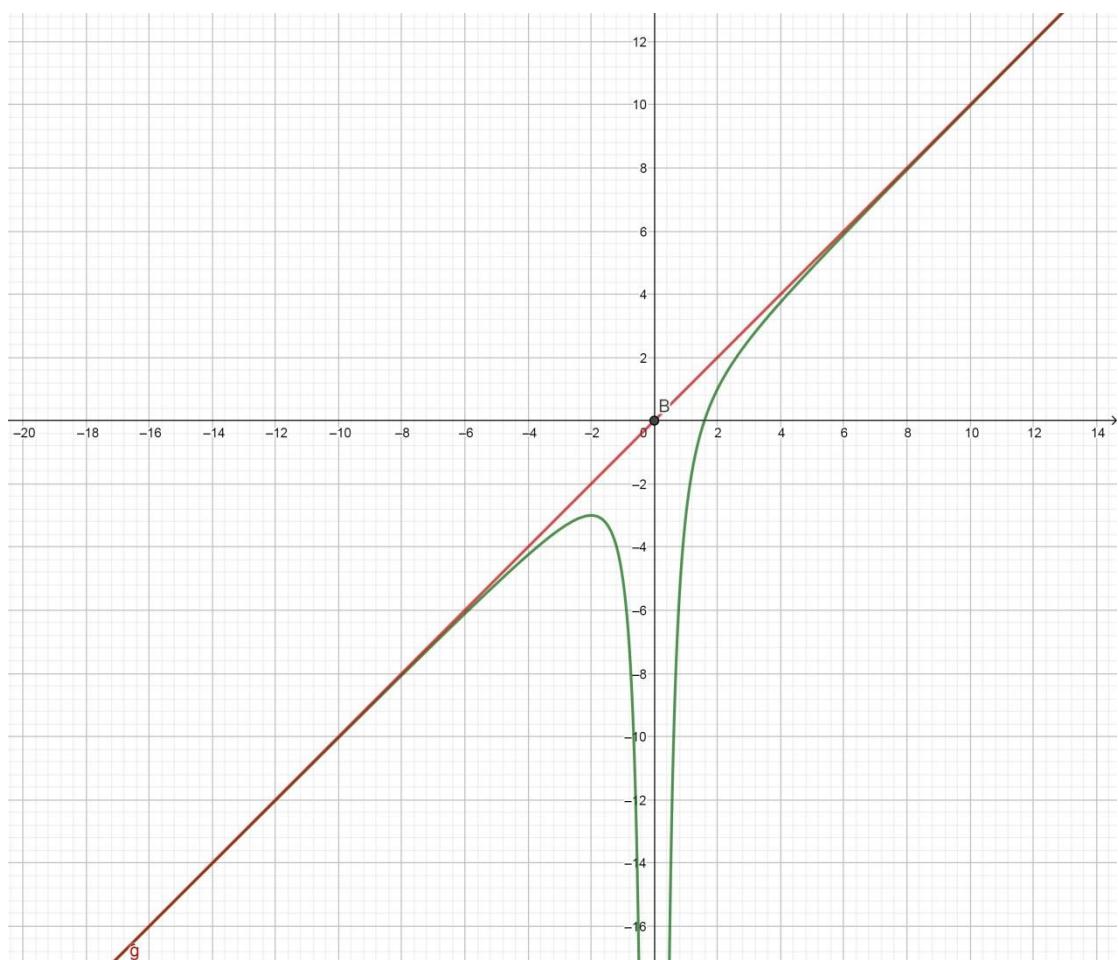
$\Delta_2 = [-2, 0)$, f γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο Δ_2 , άρα
 $f(\Delta_2) = (-\infty, -3]$

$\Delta_3 = (0, \sqrt[3]{4}]$, f γνησίως αύξουσα και συνεχής στο Δ_3 , άρα
 $f(\Delta_3) = (-\infty, 0]$

$\Delta_4 = [\sqrt[3]{4}, +\infty)$, f γνησίως αύξουσα και συνεχής στο Δ_4 , άρα
 $f(\Delta_4) = [0, +\infty)$



B4)



**Θέμα Γ**Γ1. Πλευρά τετραγώνου $\frac{\chi}{4}$ με $\chi \in (0,8)$

Εμβαδόν τετραγώνου $\left(\frac{\chi}{4}\right)^2 = \frac{\chi^2}{16} \text{ m}^2$

Υπόλοιπο τμήμα σύρματος $= 8 - \chi$

Μήκος κύκλου $= 8 - \chi \rightarrow 2\pi\rho = 8 - \chi \rightarrow \rho = \frac{8 - \chi}{2\pi}$

Εμβαδόν κύκλου $= \pi\rho^2 = \pi\left(\frac{8 - \chi}{2\pi}\right)^2 = \pi\frac{(8 - \chi)^2}{4\pi^2} = \frac{64 - 16\chi + \chi^2}{4\pi}$

$$E(\chi) = E_{\text{Τετραγώνου}} + E_{\text{Κύκλου}} = \frac{\chi^2}{16} + \frac{64 - 16\chi + \chi^2}{4\pi} = \frac{\pi\chi^2 + 256 - 64\chi + 4\chi^2}{16\pi} = \frac{(\pi + 4)\chi^2 - 64\chi + 256}{16\pi}, \chi \in (0,8)$$

Γ2. $E'(\chi) = \frac{1}{16\pi} [2(\pi + 4)\chi - 64] = \frac{1}{8\pi} [(\pi + 4)\chi - 32], \chi \in (0,8)$

$$E'(\chi) \geq 0 \rightarrow (\pi + 4)\chi - 32 \geq 0 \rightarrow \chi \geq \frac{32}{\pi + 4}$$

χ	0	$\frac{32}{\pi + 4}$	8
$E'(\chi)$		-	+
$E(\chi)$			

Ο.Ε.

Η $E(\chi)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $\chi = \frac{32}{\pi + 4}$ το $E\left(\frac{32}{\pi + 4}\right)$

Για $\chi = \frac{32}{\pi + 4}$ είναι η πλευρά τετραγώνου $\frac{\chi}{4} = \frac{8}{\pi + 4}$ όπου διάμετρος κύκλου $2\rho = 2 \cdot \frac{8 - \frac{32}{\pi + 4}}{2\pi} =$
 $2 \cdot \frac{8\pi + 32 - 32}{2\pi(\pi + 4)} = \frac{8}{\pi + 4}$

Γ3. $E(\chi) = 5 \rightarrow \frac{(\pi + 4)\chi^2 - 64\chi + 256}{16\pi} = 5, \chi \in (0,8) \rightarrow (\pi + 4)\chi^2 - 64\chi + 256 - 80\pi = 0$

$$\Delta = 64^2 - 4(\pi + 4)(256 - 80\pi) = 64^2 - 4(\pi + 4)16(16 - 5\pi) = 64^2 - 64(\pi + 4)(16 - 5\pi) = 64[64 - (\pi + 4)(16 - 5\pi)] = 64[64 - (16\pi - 5\pi^2 + 64 - 20\pi)] = 64(64 - 16\pi + 5\pi^2 - 64 + 20\pi) = 64(5\pi^2 + 4\pi) > 0$$

$$\chi_{1,2} = \frac{64 \pm \sqrt{64(5\pi^2 + 4\pi)}}{2(\pi + 4)} = \frac{32 \pm 4\sqrt{5\pi^2 + 4\pi}}{\pi + 4}$$

Είναι $32 - 4\sqrt{5\pi^2 + 4\pi} > 0 \rightarrow 64 > 5\pi^2 + 4\pi$ ισχύει άρα $\chi_1 > 0$

Εξετάζουμε αν $\chi_1 < 8 \rightarrow \frac{32 - 4\sqrt{5\pi^2 + 4\pi}}{\pi + 4} < 8 \rightarrow -\sqrt{5\pi^2 + 4\pi} < 2\pi$ που ισχύει

Άρα $\chi_1 \in (0,8)$ επομένως δεκτήΕξετάζουμε αν η χ_2 είναι δεκτή δηλ. $\chi_2 \in (0,8)$ Προφανώς $\chi_2 > 0$



Εξετάζουμε αν $\chi_2 < 8 \rightarrow \frac{32+4\sqrt{5\pi^2+4\pi}}{\pi+4} < 8 \rightarrow \sqrt{5\pi^2+4\pi} < 2\pi \rightarrow \pi^2+4\pi < 0$ αδύνατη

Αρα μοναδική ρίζα το χ_1

Θέμα Δ

Δ1.

$$f'(x) = 2e^{x-a}(x-a)' - x^2 = 2e^{x-a} - 2x = 2(e^{x-a} - x), x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2(e^{x-a} - 1), x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) \geq 0 \rightarrow 2(e^{x-a} - 1) \geq 0 \rightarrow e^{x-a} \geq 1 \rightarrow x \geq a$$

$$f(a) = 2e^0 - a^2 = 2 - a^2$$

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	σ.κ.	↗

Δ2.

$$f'(x) = 2(e^{x-a} - x)$$

$$f'(a) = 2(e^0 - a) = 2(1 - a) < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2(e^{x-a} - x)] = 2(0 - (-\infty)) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2(e^{x-a} - x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2e^{x-a} \left(1 - \frac{x}{e^{x-a}} \right) \right] = +\infty$$

Θέτουμε $x-a=u \rightarrow \begin{cases} x = a+u \\ x \rightarrow +\infty \rightarrow u \rightarrow +\infty \end{cases}$ άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-a} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-a}} \xrightarrow{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) DL.H.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(e^{x-a})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-a}} = 0$$

Έστω $A_1 = (-\infty, a]$ και $A_2 = [a, +\infty)$,

τότε $f'(A_1) = [2(1-a), +\infty)$ και $f'(A_2) = [2(1-a), +\infty)$

Έστω $A_1 = (-\infty, a]$ και $A_2 = [a, +\infty)$,

τότε $f'(A_1) = [2(1-a), +\infty)$ και $f'(A_2) = [2(1-a), +\infty)$

Έστω $A_1 = (-\infty, a]$ και $A_2 = [a, +\infty)$,

τότε $f'(A_1) = [2(1-a), +\infty)$ και $f'(A_2) = [2(1-a), +\infty)$

Οε $f'(A_1)$, $f' \searrow$ στο A_1 , τότε υπάρχει μοναδικό $\chi_1 \in (-\infty, a)$ με $f'(\chi_1) = 0$

Οε $f'(A_2)$, $f' \nearrow$ στο A_2 , τότε υπάρχει μοναδικό $\chi_2 \in (a, +\infty)$ με $f'(\chi_2) = 0$



x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	$+\infty$		$+\infty$

Ο.Ε.

Πρόσημο της $f'(x)$

x	$-\infty$	x_1	α	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

τ.μ.

τ.ε.

$$\forall x \in (-\infty, \alpha] \text{ i. με } x < x_1 \text{ είναι } x < x_1 \xrightarrow{f' \downarrow} f'(x) > f'(x_1) \rightarrow f'(x) > 0$$

$$\text{ii. με } x_1 < x < \alpha \text{ είναι } x_1 < x \xrightarrow{f' \downarrow} f'(x_1) > f'(x) \rightarrow f'(x) < 0$$

$$\forall x \in [\alpha, +\infty) \text{ i. με } \alpha < x < x_2 \text{ είναι } \alpha < x < x_2 \xrightarrow{f' \uparrow} f'(x) < f'(x_2) \rightarrow f'(x) < 0$$

$$\text{ii. με } x > x_2 \text{ είναι } x > x_2 \xrightarrow{f' \uparrow} f'(x) > f'(x_2) \rightarrow f'(x) > 0$$

Δ3.

$$\text{Για } \alpha < x < x_2 \xrightarrow{f \downarrow} f(\alpha) > f(x)$$

$$\text{Αρκεί να δείξουμε ότι } f(1) > f(\alpha) \leftrightarrow 2 \cdot e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 > 0$$

$$\text{Θεωρούμε συνάρτηση } g \text{ με } g(x) = 2 \cdot e^{1-x} + x^2 - 3, x \geq 1$$

$$\text{Έχουμε: } g'(x) = -2e^{1-x} + 2x$$

$$g''(x) = 2e^{1-x} + 2 > 0, \text{ άρα } g'(x) \uparrow \text{ στο } [1, +\infty)$$

$$\bullet \quad x > 1 \xrightarrow{g' \uparrow} g'(x) > g'(1) = 0, \quad g \text{ συνεχής στο } [1, +\infty), \text{ άρα } g \uparrow \text{ στο } [1, +\infty)$$

$$\bullet \quad \alpha > 1 \xrightarrow{g \uparrow} g(\alpha) > g(1) = 0 \leftrightarrow 2 \cdot e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 > 0 \leftrightarrow f(1) > f(\alpha)$$

Άρα $f(1) > f(\alpha) > f(x) \quad \forall \alpha \in (\alpha, x_2)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2)



Δ4.

Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στη θέση $x_0 = 2$, τότε:

$$(ε) : \psi - f(2) = f'(2)(x - 2) \leftrightarrow \dots\dots\dots \psi = -2x + 2$$

Από 1° πίνακα του Δ2 προκύπτει ότι η f είναι κυρτή, άρα $f(x) \geq -2x + 2$.

$$\text{Έχουμε λοιπόν: } \int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} dx > \int_2^3 (-2x + 2) \sqrt{x-2} dx \quad (1)$$

$$\text{Θέτουμε: } \sqrt{x-2} = u \leftrightarrow \begin{cases} u^2 = x - 2 \leftrightarrow u^2 + 2 = x \leftrightarrow 2u du = dx \\ \text{Για } x = 2 \leftrightarrow u = 0 \\ \text{Για } x = 3 \leftrightarrow u = 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$(1) \xrightarrow{(2)} \int_0^1 [-2(u^2 + 2) + 2] u \cdot 2u du = \int_0^1 2u^2 (-2u^2 - 4 + 2) du =$$

$$\int_0^1 -4u^4 - 4u^2 du = -4 \left[\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{32}{15}$$

$$\text{Άρα } \int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} dx > -\frac{32}{15}$$