

Θεμα Α

α) την διαδικασία μέσω της οποίας κάθε στοιχείο x του A αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό

β) ι) $f: A \rightarrow R$ Η f έχει αντίστροφη όταν είναι 1-1 στο A

ιι) είναι $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ με $f^{-1}(y) = x$ με το x να ανήκει στο A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$

A.2 σελ 142 σχολικό

A.3 σελ 135 σχολικό

A.4 α) λανθος γιατί $f(x) = \begin{cases} 2019, & x \in (0, +\infty) \\ 1, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$

Είναι $f'(x) = 0$ για κάθε

$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ενώ η $f(x)$ δεν είναι σταθερή στο ίδιο διάστημα

β) λανθος. Διότι για την $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \neq 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$ είναι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \neq f(1) = 5$

γ) σωστή απάντηση το γ δηλ ο αριθμός 4

Θέμα Β

B.1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + \lambda) = 2 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad (2)$$

$$(1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \lambda = 2$$

$$\text{Άρα } f(x) = e^x + 2$$

B.2

$$f(x) - x = 0 \quad (1)$$

$$e^{-x} + 2 - x = 0$$

$$e^{-x} - x + 2 = 0$$

Θεωρούμε $g(x) = e^{-x} - x + 2 / R$

Η $g(x)$ συνεχής στο R ως πράξη συνεχών



Η $g(x)$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων

$$\text{με } g'(x) = -e^{-x} - 1$$

$$g'(x) - (e^{-x} + 1) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Άρα $g(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

$$g(2) = e^{-2} - 2 + 2 = \frac{1}{e^2} > 0 \quad (\alpha)$$

$$g(3) = e^{-3} - 3 + 2 = \frac{1}{e^3} - 1 < 0 \quad (\beta)$$

Η $g(x)$ συνεχής στο $[2,3]$ (γ)

(α), (β), (γ) $\xrightarrow{\text{θ. Bolzano}}$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (2,3)$: $g(x_0) = 0$

Επί πλέον η $g(x)$ γν. φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $(2,3)$, συνεπώς η x_0 είναι μοναδική ρίζα της $g(x) = 0$, οπότε η x_0 είναι μοναδική ρίζα της (1)

B.3

$$f(x) = e^{-x} + 2 / \mathbb{R}$$

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x) = e^{-x} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, άρα $f(x)$ γν. φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι "1-1", άρα αντιστρέφεται.

$$f(x) = \psi$$

$$e^{-x} + 2 = \psi, \quad \psi > 2$$

$$e^{-x} = \psi - 2$$

$$\ln e^{-x} = \ln(\psi - 2)$$

$$-x = \ln(\psi - 2)$$

$$x = \ln \frac{1}{\psi - 2}$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = \ln \frac{1}{x-2}, \quad x > 2$$

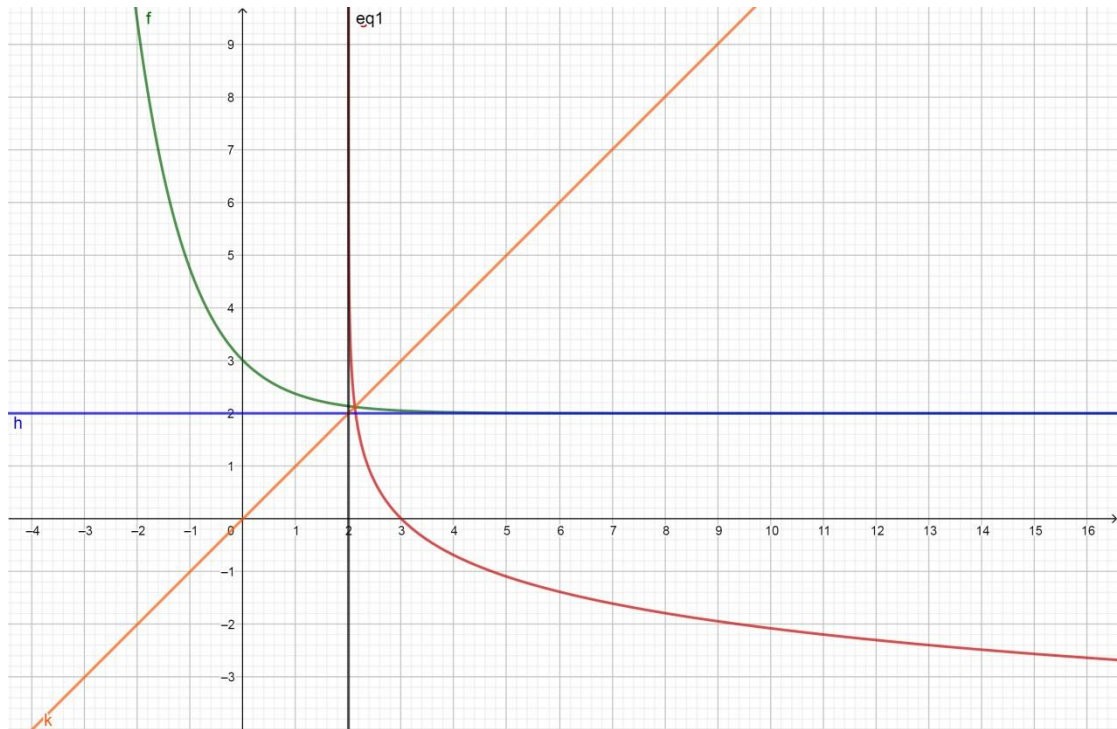
B.4

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \ln \frac{1}{x-2} = +\infty \text{ διότι:}$$

Θέτουμε:

$$x - 2 = u \leftrightarrow \begin{cases} x \rightarrow 2 + \Rightarrow u \rightarrow 0 + \\ \frac{1}{x-2} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{u} \rightarrow +\infty \\ \ln \frac{1}{u} = +\infty \end{cases}$$

Πληκτρολογήστε την εξίσωση εδώ. Άρα η $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$



Θέμα Γ

Γ.1

Επειδή f παραγωγίσιμη στο R αρα και στο 1, η f είναι συνεχής στο

$$\begin{aligned} x_0 = 1 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1) \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (e^{x-1} + \beta x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + \alpha) = 1^2 + \alpha \\ &\leftrightarrow 1 + \beta = 1 + \alpha \leftrightarrow \alpha = \beta \end{aligned}$$

Για $\alpha = \beta$ είναι $f(x) = x^2 + \alpha$, $x \geq 1$ ή

$$f(x) = e^{x-1} + \alpha x, \quad x < 1$$

Επειδή f παραγωγίσιμη στο x_0 είναι $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \alpha x - (1-\alpha)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{e^{x-1}-1}{x-1} + \frac{\alpha(x-1)}{x-1} \right] = \alpha + 1$$



info@ekpaideysh.gr

www.ekpaideysh.gr

ΒΕΡΓΙΟΠΟΥΛΟΣ

Διότι $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1}}{x-1} = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{e^u - 1}{u} = (D.H.L) \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{(e^u - 1)'}{u'} = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{e^u}{1} = 1$
ΑΘΗΝΑ: ΚΥΨΕΛΗΣ 47 & ΣΠΕΤΣΟΠΟΥΛΑΣ 11 ☎ 210 8254700
ΑΛΙΜΟΣ: ΘΟΥΚΥΔΙΔΟΥ 47 (3ος ΟΡΟΦΟΣ) ☎ 210 9824543

* $x - 1 = u, x \rightarrow 1$ τότε $u \rightarrow 0$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + \alpha - (1-\alpha)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$$

Είναι $\alpha + 1 = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$

Αρα $\alpha = 1$ και $\beta = 1$

Γ.2

Για $\alpha = 1$ και $\beta = 1$ είναι $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + x, & x < 1 \end{cases}$

i) Αν $x \in (1, +\infty)$ τότε η $f(x) = x^2 + 1$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x > 0$ άρα $f(x)$ γν. αύξουσα στο $(1, +\infty)$

ii) Αν

$x \in (-\infty, 1)$ τότε η $f(x) =$

$e^{x-1} + x$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων με $f'(x) = e^x - 1 > 0$ άρα $f(x)$ γν. αύξουσα στο $(-\infty, 1)$

Επειδή f συνεχής στο $x_0 = 1$ η $f(x)$ είναι γν. αύξουσα στο R

Έστω $\Delta_1 = (-\infty, 1]$ και $\Delta_2 = [1, +\infty)$

Επειδή f γν. αύξουσα και συνεχής στο Δ_1 είναι $f(\Delta_1) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1)] = (-\infty, 2]$

Διότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = \lim_{u \rightarrow 0^-} e^u = 0$ αφού $x - 1 = u$ και όταν $x \rightarrow -\infty$ τότε $u \rightarrow -\infty$

και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Επειδή f γν. αύξουσα και συνεχής στο Δ_2 είναι $f(\Delta_2) = [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [2, +\infty)$ διότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

Αρα $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = (-\infty, 2] \cup [2, +\infty) = R$

Γ.3

A) Επειδή $f(\Delta_2) = [2, +\infty)$ η $f(x)$ δεν έχει ρίζα στο $\Delta_2 = [1, +\infty)$

Επειδή το $0 \in f(\Delta_1) = (-\infty, 2]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-\infty, 1)$ με $f(x_0) = 0$ επειδή f γν. αύξουσα στο $(-\infty, 1)$ το x_0 είναι μοναδικό.

Επειδή στο $[0, 1]$ η f είναι συνεχής και γν. αύξουσα είναι

$$f([0, 1]) = [f(0), f(1)] = \left[\frac{1}{e}, 2 \right]$$

Επειδή το 0 δεν ανήκει στο $f([0, 1])$ το μοναδικό x_0 με $f(x_0) = 0$ ανήκει στο $(-\infty, 0)$

$$B) f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)[f(x) - x_0] = 0 \begin{cases} f(x) = 0 & \text{αδύνατη στο } (x_0, +\infty) \\ f(x) = x_0 \end{cases}$$

Η $f(x) = x_0$ είναι αδύνατη στο $(\chi_0, +\infty)$ διότι $\chi_0 < 0$ και $\forall \chi > \chi_0 \xleftrightarrow{f \text{ γν. αύξουσα}}$

$$f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$$



@ **info@ekpaideysh.gr**

www.ekpaideysh.gr

ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ
ΒΕΡΓΙΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΘΗΝΑ: ΚΥΨΕΛΗΣ 47 & ΣΠΕΤΣΟΠΟΥΛΑΣ 11 ☎ 210 8254700 📠 210 8254700
ΑΛΙΜΟΣ: ΘΟΥΚΥΔΙΔΟΥ 47 (3ος ΟΡΟΦΟΣ) ☎ 210 9824543 📠 210 9824543

Γ.4

$$E_{ΜΟΚ} = \frac{1}{2}(OK)(MK) = \frac{1}{2}|\chi||f(x)| = \frac{1}{2}x|x^2 + 1| = \frac{1}{2}(x^3 + x)$$

$$\text{Άρα } E(t) = \frac{1}{2}[x^3(t) + x(t)] \text{ άρα } E'(t) = \frac{1}{2}x'(t)[3x^2(t) + 1]$$

$$\text{Για } t = t_0 \text{ είναι } E'(t_0) = \frac{1}{2}x'(t_0)[3x^2(t_0) + 1] \quad (1)$$

Είναι $x'(t_0) = 2 \text{ μον/sec}$ και $x(t) = 3 \text{ μον}$ οπότε η (1) γίνεται $E'(t_0) = \frac{1}{2}2[3 \times 9 + 1] = 28 \text{ μον/sec}$.

ΘΕΜΑ Δ

δ.1

$$A(1,1) \in C_f : 1 = 0 + \alpha + \beta \rightarrow \beta = 1 - \alpha, \text{ οπότε } f(x) = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha x + 1 - \alpha$$

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξη συνεχών και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παρλμων με

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} + \alpha$$

Το A σημείο επαφής της C_f και $(\varepsilon) \psi = -x + 2$ εφαπτομένη στο $\chi_0 = 1$, άρα $f'(1) = -1$

$$\ln(1 - 2 + 2) + \frac{2(1-1)^2}{1-2+2} + \alpha = -1 \rightarrow 0 + 0 + \alpha = -1 \rightarrow \alpha = -1, \text{ οπότε } \beta = 1 + 1 \rightarrow \beta = 2$$

$$\text{Συνεπώς } f(x) = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2$$

δ.2

$$E = \int_1^2 |f(x) - y_\varepsilon| dx = \int_1^2 |f(x) - (-x + 2)| dx = \int_1^2 |(x-1)\ln(x^2 - 2x + 2)| dx$$

Για κάθε $\chi \in [1, 2]$ είναι

- $x-1 \geq 0$
- $\ln(x^2 - 2x + 2) = \ln(x^2 - 2x + 1 - 1) = \ln((x-1)^2 + 1) \geq \ln 1 = 0$

$$\text{Άρα } E = \int_1^2 (x-1) \ln(x^2 - 2x + 2) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (2(x-1) \ln(x^2 - 2x + 2)) dx$$

Θέτουμε $x^2 - 2x + 2 = u$ τότε

$$\circ du = 2(x-1)dx$$

$$\circ \text{ για } x=1 \text{ είναι } u=1$$

 info@ekpaideysh.gr

www.ekpaideysh.gr

ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ
ΒΕΡΓΙΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΘΗΝΑ: ΚΥΨΕΛΗΣ 47 & ΣΠΕΤΣΟΠΟΥΛΑΣ 11
ΑΛΙΜΟΣ: ΘΟΥΚΥΔΙΔΟΥ 47 (3ος ΟΡΟΦΟΣ)

210 8254700  210 8254700
210 9824543  210 9824543

$$\circ \text{ για } x=2 \text{ είναι } u=2$$

$$\text{άρα } E = \frac{1}{2} \int_1^2 \ln u du = \frac{1}{2} \int_1^2 (u)' \ln u du = \frac{1}{2} \{ [u \ln u]_1^2 - \int_1^2 u (\ln u)' du \} =$$

$$\frac{1}{2} \{ [u \ln u]_1^2 - [u]_1^2 \} = \frac{1}{2} \{ 2 \ln 2 - 1 \} = \ln 2 - \frac{1}{2} \text{ τ.μ}$$

δ.3

α) για κάθε x που ανήκει στο $\mathbb{R}$ είναι $g'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + (x-1) \frac{1}{x^2 - 2x + 2} (2x-2) - 1 =$

$$\ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 \geq -1 \text{ διότι}$$

$$\triangleright \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} \geq 0$$

$$\triangleright x^2 - 2x + 2 = (x^2 - 2x + 1) + 1 = (x-1)^2 + 1 \geq 1 \text{ άρα } \ln(x^2 - 2x + 2) \geq \ln 1 = 0$$

β) αρκεί να δείξω ότι $f(\lambda + \frac{1}{2}) \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + 2 - \frac{1}{2} - \lambda$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2} \quad (1) \text{ Πληκτρολογήστε την εξίσωση εδώ.}$$

Από θεώρημα μέσης τιμής για την f στο διάστημα $\left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi \in \left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) = \frac{1}{2} f'(\xi)$$

$$\text{Αρκεί να δείξω ότι } \frac{1}{2} f'(\xi) \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(\xi) \geq -1 \text{ που ισχύει από το α)}$$

Δ.4

1^{ος} Τρόπος

$$g(x) = -x^3 - x + 2, x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η g είναι δυό φορές παραγωγίσιμη με: $g'(x) = -3x^2 - 1$ και $g''(x) = -6x$.

Λύνουμε:

- $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $g''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$
- $g''(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$

η g' παρουσιάζει στο $x=0$ ολικό μέγιστο, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g'(x) \leq g'(0) \Leftrightarrow g'(x) \leq -1$, με την ισότητα να ισχύει για

$x = 0$. Γνωρίζουμε όμως ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$f'(x) \geq -1$. αν υπάρχει κοινή εφαπτομένη στην C_f, C_g , τότε αυτή θα

αναφέρεται σε σημείο με τεταγμένη $x_0=0$, οπότε αυτή η ευθεία έχει την εξίσωση :

$$y - g(0) = g'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 2 = -x \Leftrightarrow$$

ε κ π α ί δ ε υ σ η
ΒΕΡΓΙΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΘΗΝΑ: ΚΥΨΕΛΗΣ 47 & ΣΠΕΤΣΟΠΟΥΛΑΣ 11
ΑΛΙΜΟΣ: ΘΟΥΚΥΔΙΔΟΥ 47 (3ος ΟΡΟΦΟΣ)

210 8254700 210 8254700
210 9824543 210 9824543

www.ekpaideysh.gr

$y = -x + 2$ που είναι η κοινή εφαπτομένη των δύο γραφικών παραστάσεων

2ος Τρόπος

Έστω (ε_1) εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_1, f(x_1))$ και (ε_2) της C_g στο σημείο

$B(x_2, f(x_2))$. Τότε $\varepsilon_1 : y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = f'(x_1)x + f(x_1) - x_1 f'(x_1)$

$$\varepsilon_2 : y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = g'(x_2)x + g(x_2) - x_2 g'(x_2)$$

. Για να υπάρχει κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g πρέπει:

$$f'(x_1) = g'(x_2) \quad (1)$$

$$f(x_1) - x_1 f'(x_1) = g(x_2) - x_2 g'(x_2) \quad (2)$$

Αλλά $f'(x_1) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x_1=1$

Και $g'(x_2) = -3x_2^2 - 1 \leq -1 \forall x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x_2=0$

Άρα η (1) ισχύει για $x_1=1$ και $x_2=0$, το ίδιο και η σχέση (2). Οπότε η κοινή

εφαπτομένη είναι : $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = -(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2$