

Θέμα Α

A1: Θεώρημα σελ. 76

A2. Μία συνάρτηση λέγεται παραγωγίσιμη στο $[α,β]$ όταν είναι παραγωγίσιμη στο $(α,β)$ και υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ και } \lim_{x \rightarrow \beta^+} \frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}$$

A3. Α) Ψ

B) Αντιπαράδειγμα η $f(x)=x^3$

A4. Α) Λ

B) Σ

Γ) Σ

Δ) Σ

Ε) Σ

Θέμα Β

B1. $A_f=(1,+\infty)$, $A_g=\mathbb{R}$ και $A_{f \circ g}=\{x \in (1,+\infty): A_g \in (0,+\infty) = (1,+\infty)\}$

$$f(g(x)) = \frac{g(x)+2}{g(x)-1} = \frac{e^x+2}{e^x-1}, x \in (1,+\infty)$$

B2. Θεωρούμε $K(x) = \frac{e^x+2}{e^x-1}, x \in (1,+\infty)$

$K(x)$ συνεχής στο $(1,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών

$K(x)$ παρ/μη στο $(1,+\infty)$

B2. με $K(x) = \frac{(e^x+2)'(e^x-1) - (e^x-1)'(e^x+2)}{(e^x-1)^2} = \frac{-3e^x}{(e^x-1)^2} < 0$ για κάθε $x > 0$ άρα $K(x) \downarrow$ στο $(0,+\infty)$ άρα η $K(x)$ είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται

$$\frac{e^x+2}{e^x-1} = y \Leftrightarrow e^x(1-y) = y+2 \Leftrightarrow e^x = \frac{y+2}{y-1} \Leftrightarrow x = \ln \frac{y+2}{y-1}, y \in (1,+\infty)$$

B3. $\Phi(x)$ συνεχής στο $(1,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών

$\Phi(x)$ παρ/μη στο $(1,+\infty)$ ως πράξεις παρ/μων

$$\text{Με } \varphi'(x) = \frac{x-1}{x+2} \cdot \left(\frac{x+2}{x-1}\right)' = \frac{-3}{(x-1)(x+2)} < 0 \text{ για κάθε } x > 1$$

Άρα $\varphi(x) \downarrow$ στο $(1,+\infty)$, οπότε η $\varphi(x)$ είναι 1-1

$$\text{B4. } \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} [\ln(x+2) - \ln(x-1)] = \ln(1+2) - (-\infty) = +\infty$$

Θέτουμε $u=x-1$

$$x \rightarrow 1^+ \Leftrightarrow x-1 \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow u \rightarrow 0^+$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left[\frac{x+2}{x-1} \right] \right] = 0$$

$$\text{Θεωρούμε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x+2}{x-1} \right] \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = 1$$

ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma 1. A_f = \left[0, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Αφού η f συνεχής στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right)$, άρα θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 - \ln \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta \mu x + \lambda \sigma \upsilon \nu x) = 1 - \ln \lambda$$

$$\eta \mu 0 + \lambda \sigma \upsilon \nu 0 = 1 - \ln \lambda$$

$$\lambda = 1 - \ln \lambda \quad (1)$$

$$\text{Θεωρούμε } g(x) = \ln x + x - 1 \in (0, +\infty)$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} + x > 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

$$\text{Άρα } g(x) \nearrow \text{ στο } (0, +\infty)$$

$$\text{Ισχύει } g(1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow H x = 1 \text{ μοναδική}$$

$$\text{ρίζα της } g(x) = 0, \text{ άρα για την (1) έχουμε } \lambda = 1$$

$$\text{Οπότε } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \ln \lambda, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Gamma 2. \text{ Έστω } (\varepsilon) \text{ η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο } A(0,1)$$

$$\text{Οπότε } (\varepsilon): \psi - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \quad f'(0) = \varepsilon \varphi \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\psi - 1 = 1 \cdot x$$

$$\psi = x + 1$$

$$\text{Άρα πράγματι ορίζεται η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο } A(0,1) \text{ με } \lambda_{(\varepsilon)} = \varepsilon \varphi \frac{\pi}{4} = 1$$

Γ3. Κρίσιμα σημεία

- Εσωτερικά σημεία του A_f όπου $f'(x) = 0$
- Εσωτερικά σημεία του A_f όπου δεν υπάρχει η παράγωγος της f

$$\text{Έχουμε: } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2}, & x < 0 \\ \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} = 1 \in \mathbb{R} = f'_a(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \right) = 1 + 0 = 1 \in \mathbb{R} = f'_\delta(0)$$

Άρα αφού $f'_a(0) = f'_\delta(0) = 1$ ισχύει $f'(0) = 1$

Συνεπώς κρίσιμα σημεία είναι μόνο το 0.

Γ4.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \leq 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$M(a, f(a)) \text{ με } a'(t) = -\frac{a(t)}{3}$$

$$\varepsilon: y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$y - \frac{1}{1-a} = \frac{1}{(1-a)^2}(x-a) (*) \quad \Leftrightarrow f(a) = \frac{1}{1-a}, f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, x < 0$$

$$\text{Για } y=0 \Leftrightarrow \frac{-1}{1-a} = \frac{1}{(1-a)^2} \cdot (x-a) \Leftrightarrow (1-a)^2 \frac{-1}{1-a} = +(x-a) \Leftrightarrow -(1-a) = +(x-a) \Leftrightarrow x = 2a - 1$$

$$\text{Άρα } x_b(t) = 2a(t) - 1$$

$$\text{Είναι } x'_B(t) = 2a'(t) = 2 \cdot \frac{-a(t)}{3}$$

$$\text{Για } t=t_0 \text{ είναι } x'_B(t) = \frac{-2a(t_0)}{3}$$

$$\text{Είναι } a(t_0) = -1$$

$$\text{Άρα } x'_B(t) = \frac{2}{3} \text{ μονάδες μήκους/χρόνου}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών και παρ/μη ως πράξεις συνεχών και παρ/μη ως πράξεις παρ/μων στο $\mathbb{R}$

με $f'(x) = e^x + 2x - e$

$f'(x)$ συνεχής και παρ/μη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παρ/μων με $f''(x) = e^x + 2 > 0$

άρα $f'(x) \uparrow$ για κάθε x ανήκει $\mathbb{R}$, άρα η f' θα έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $(0,1)$

X	0	x_0	1
f			
f'			+

Άρα η f παρουσιάζει
ολικό ελάχιστο στο x_0 για
κάθε $x \in (0,1)$

Επίσης $f(0) = e^0 + 0 - 0 - 1 = 0$

$f(1) = e + 1 - e - 1 = 0$ άρα $f < 0$ στο $(0,1)$

έχουμε $f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - e \cdot x_0 - 1$ (1)

$f'(x_0) = e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$ (2)

από (1) και (2) $f(x_0) = x_0^2 + e - 2x_0 - e \cdot x_0 - 1 = x_0^2 - x_0(2 - e) + e - 1$

$\Delta 2. \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} (x - x_0) + (x - x_0) \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right] =$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} \left[f'(x_0) + (x - x_0) \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right]$ (1)

- Για $x > x_0$ είναι $x - x_0 > 0$ και $f'(x) > 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} \left[f'(x_0) + (x - x_0) \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right] = +\infty (f'(x_0) + 0) = +\infty$
- Για $x < x_0$ είναι $x - x_0 < 0$ και $f'(x) < 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} \left[f'(x_0) + (x - x_0) \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right] = -\infty (f'(x_0) + 0) = -\infty$

$\Delta 3.$ Έστω $g(x) = f(x) + x - x_0$, $x \in \mathbb{R}$ είναι g συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[x_0, 1]$ ως πράξεις συνεχών με:

- $g(x_0) = f(x_0) + x_0 - x_0 = f(x_0)$
- $g(1) = f(1) + 1 - x_0 = 1 - x_0 > 0$

Από θ. Bolzano υπάρχει ρ που ανήκει στο $(x_0, 1)$: $g(\rho) = 0$

Για κάθε x_1, x_2 στο $(x_0, 1)$ με $x_1 < x_2$ είναι $x_1 - x_0 < x_2 - x_0$ και $f(x_1) < f(x_2)$

$f(x_1) + x_1 - x_0 < f(x_2) + x_2 - x_0 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$

Είναι $g(x) \uparrow \forall x \in (x_0, 1)$ άρα το ρ είναι μοναδικό

$\Delta 4.$ Από $\Delta 3$ είναι $f(\rho) + \rho = x_0 \Leftrightarrow f(\rho) = x_0 - \rho < 0$ (3)

Αρκεί ν.δ.ο. για κάθε $\kappa \in (\rho, 1)$ είναι $f(x_0) > f(\rho) \cdot (f'(\kappa) + 1) \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{f(\rho)} < f'(\kappa) + 1$

$\frac{f(x_0)}{f(\rho)} - 1 < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(\rho)}{f(\rho)} < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa)$ (4)

Από ΘΜΤ για την f' στο $[x_0, \rho]$ $\exists \xi \in (x_0, \rho)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho}$

Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $f'(\xi) < f'(\kappa)$

Είναι $\xi < \kappa$ διότι ξ ανήκει (x_0, ρ) και κ ανήκει $(\rho, 1)$ και $f' \uparrow$ στο $\mathbb{R}$ άρα $f'(\xi) < f'(\kappa)$

Άρα για κάθε κ που ανήκει στο $(\rho, 1)$ ισχύει $f(x_0) > f(\rho) \cdot (f'(\kappa) + 1)$