

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
Τετάρτη 17 Ιουνίου 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΟΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 111

A2. Σελίδα 104 σχολικού βιβλίου.

A3. Θεώρημα σελίδα 74 σχολικού βιβλίου

A4. (α) Ψ

(β) Για παράδειγμα για την συνάρτηση $f(x) = x$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ενώ το

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει (σελίδα 61 σχολικού βιβλίου)

A5.

α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος



ΘΕΜΑ Β

$$\mathbf{B1.} \quad f(x) = \frac{3x+1}{x-3} = \frac{3x-9+10}{x-3} = \frac{3(x-3)+10}{x-3} = 3 + \frac{10}{x-3}$$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{3\}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε

$$3 + \frac{10}{x_1-3} = 3 + \frac{10}{x_2-3} \Leftrightarrow \frac{10}{x_1-3} = \frac{10}{x_2-3} \Leftrightarrow 10x_2 - 30 = 10x_1 - 30 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται

B2. Για $x \neq 3$

$$f(x) = y \Leftrightarrow 3 + \frac{10}{x-3} = y \Leftrightarrow \frac{10}{x-3} = y - 3 \stackrel{y \neq 3}{\Leftrightarrow} \frac{x-3}{10} = \frac{1}{y-3} \Leftrightarrow x-3 = \frac{10}{y-3} \Leftrightarrow x = 3 + \frac{10}{y-3}$$

$$\text{άρα } f^{-1}(x) = 3 + \frac{10}{x-3}, x \neq 3$$

Άρα $f(x) = f^{-1}(x)$ για κάθε $x \neq 3$

$$\mathbf{B3} \quad (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x, x \neq 3$$

B4. Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} f(x) = 0$ και

$$\left| f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| = |f(x)| \cdot \left| \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| \leq |f(x)|$$

$$\text{Επομένως } -|f(x)| \leq f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \leq |f(x)|$$

Για τιμές του x κοντά στο $-\frac{1}{3}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} (-|f(x)|) = 0$ επομένως

$$\text{σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \left(f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right) = 0$$

ΘΕΜΑ Γ



ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ
ΒΕΡΓΙΟΠΟΥΛΟΣ

Γ1. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία A είναι εγγεγραμμένη στο με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο με αυτή.

Άρα $\angle BO\Gamma = 2\theta$ και επειδή $\angle BOM = \theta$ άρα και $\angle MO\Gamma = \theta$, δηλαδή στο ισοσκελές τρίγωνο BOM η OM είναι διχοτόμος της γωνίας της κορυφής άρα η OM είναι διάμεσος και ύψος.

Επομένως στο τρίγωνο OMB το οποίο είναι

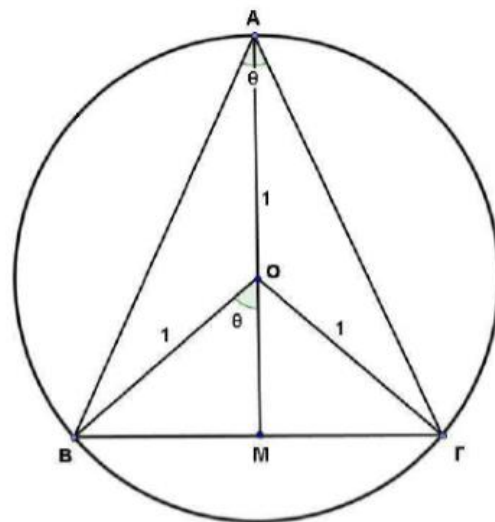
ορθογώνιο ισχύει $\eta\mu\theta = \frac{BM}{OB} \Leftrightarrow BM = \eta\mu\theta$

Άρα $B\Gamma = 2 \cdot BM = 2\eta\mu\theta$

$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{OM}{OB} \Leftrightarrow OM = \sigma\upsilon\nu\theta$

$E = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot AM = \frac{1}{2} 2\eta\mu\theta (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$ επομένως

$E(\theta) = \eta\mu\theta (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$



Η παραπάνω σχέση αποδείχθηκε θεωρώντας τη γωνία θ οξεία, ο ίδιος τύπος ισχύει και για την αμβλεία.

Γ2. Η συνάρτηση $E(\theta) = \eta\mu\theta (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$ με $\theta \in (0, \pi)$ είναι παραγωγίσιμη με

$$E'(\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta (1 + \sigma\upsilon\nu\theta) + \eta\mu\theta (-\eta\mu\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta$$

$$= \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta - (1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1$$

$E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = -1$ ή $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$ και επειδή $\theta \in (0, \pi)$ δεκτή μόνο η

$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$ από την οποία προκύπτει $\theta = \frac{\pi}{3}$

1^{ος} τρόπος

Η E' είναι συνεχής στο διάστημα $(0, \pi)$ και μηδενίζεται όταν $\theta = \frac{\pi}{3}$ άρα

διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\left(0, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$



Διάστημα	$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$
Επιλεγμένος θ_0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$E'(\theta_0)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
Πρόσημο της $E'(\theta)$	+	-

2^{ος} τρόπος

$$E'(\theta) = 2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 2(\sin\theta + 1)\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right)$$

$$E'(\theta) > 0 \Leftrightarrow 2(\sin\theta + 1)\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow \sin\theta - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \sin\theta > \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x < \frac{\pi}{3}$$

Διότι η συνάρτηση συνημίτονο είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \pi)$

Εφόσον βρήκαμε το πρόσημο της E' έχουμε βρει και τα διαστήματα μονοτονίας της E

x	$-\infty$	$\frac{\pi}{3}$	$+\infty$
$E'(\theta)$	+		-
$E(\theta)$			

Επομένως το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $x = \frac{\pi}{3}$

Γ3. Στο διάστημα $A_1 = \left(0, \frac{\pi}{3}\right]$ η $E(\theta)$ συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα

$$E(A_1) = \left(\lim_{\theta \rightarrow 0^+} E(\theta), E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$$

Ο αριθμός $\frac{3}{4} \in E(A_1)$ άρα υπάρχει $\theta_1 \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ ώστε $E(\theta_1) = \frac{3}{4}$, το θ_1 μοναδικό διότι η $E(\theta)$ γνησίως αύξουσα στο A_1



Στο διάστημα $A_2 = \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ η $E(\theta)$ συνεχής και γνησίως

$$E(A_2) = \left(\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} E(\theta), E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$$

Ο αριθμός $\frac{3}{4} \in E(A_2)$ άρα υπάρχει $\theta_2 \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ ώστε $E(\theta_2) = \frac{3}{4}$, το θ_2 μοναδικό διότι η $E(\theta)$ γνησίως φθίνουσα στο A_2

Άρα υπάρχουν μόνο δύο $\theta_1, \theta_2 \in (0, \pi)$ με $\theta_1 < \theta_2$ ώστε $E(\theta_1) = \frac{3}{4}$ και $E(\theta_2) = \frac{3}{4}$

Γ4. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης τιμής για την συνάρτηση $E(\theta)$ στα διαστήματα $\left[\theta_1, \frac{\pi}{3}\right]$ και $\left[\frac{\pi}{3}, \theta_2\right]$ οπότε υπάρχουν ξ_1, ξ_2 που ανήκουν στα $\left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{3}, \theta_2\right)$ αντίστοιχα έτσι ώστε :

$$E'(\xi_1) = \frac{E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_1)}{\frac{\pi}{3} - \theta_1} \quad (1) \quad \text{και} \quad E'(\xi_2) = \frac{E(\theta_2) - E\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}} \quad (2)$$

$$(1) : E'(\xi_1) \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) = E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_1)$$

$$(2) : E'(\xi_2) \left(\theta_2 - \frac{\pi}{3}\right) = E(\theta_2) - E\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Άρα :

$$E'(\xi_1) \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) = E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_1) = E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_2) = -E'(\xi_2) \left(\theta_2 - \frac{\pi}{3}\right) = E'(\xi_2) \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right)$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - \ln(\lambda x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$$

και $f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα

και έχει προφανή ρίζα την $x = 1$ η οποία είναι μοναδική εφόσον f' γνησίως αύξουσα.

Το πρόσημο της f' είναι :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} x > 1 \quad \text{και} \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} 0 < x < 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα για $x = 1$ η f έχει ελάχιστο το $f(1) = -\ln \lambda$

Δ2. Για κάθε $x > 0$ έχουμε :

$$x^x \geq \lambda x \Leftrightarrow \ln x^x \geq \ln(\lambda x) \Leftrightarrow x \ln x - \ln(\lambda x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$$

Για να είναι η f μη αρνητική εφόσον παρουσιάζει ελάχιστο θα πρέπει η ελάχιστη τιμή της να είναι μη αρνητική δηλαδή :

$$-\ln \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \ln \lambda \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 1$$

άρα η μεγαλύτερη τιμή του λ είναι το 1



Δ3. Έστω $A(x_0, g(x_0))$ σημείο της C_g , η εξίσωση εφαπτομένης $y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$ η οποία διέρχεται από την αρχή
 $0 - g(x_0) = g'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow g(x_0) = x_0 g'(x_0)$

$$\Leftrightarrow g(x_0) = x_0 (\ln x_0 + 1) \cdot g'(x_0) \stackrel{g(x_0) \neq 0}{\Leftrightarrow} 1 = x_0 (\ln x_0 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_0} = \ln x_0 + 1 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

Άρα η ευθεία $y = x$ είναι η μοναδική εφαπτομένη της C_g η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Δ4.

(i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x}$, θέτουμε $u = x \ln x$ άρα

$$u_0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = \lim_{u \rightarrow 0^+} e^u = 1$ και επειδή $h(1) = 1$ η συνάρτηση h είναι συνεχής στο 0 , επίσης είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση συνεχώς συναρτήσεων άρα είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

(ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x^{2020} \left(3 - 2 \int_1^x g(t) dt \right) + (1-x) \int_0^1 h(1-t) dt$

Η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πολωνυμική και επιπλέον έχουμε :

$$h(0) = \int_0^1 h(1-t) dt \quad \text{κάνοντας την αντικατάσταση } u = 1-t \text{ προκύπτει}$$

$$h(0) = \int_0^1 h(u) du > 0 \quad \text{διότι } h(x) > 0 \text{ για κάθε } x \geq 0$$

Επομένως $g(x) \geq x$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$ άρα

$$\int_1^2 g(x) dx > \int_1^2 x dx \Leftrightarrow \int_1^2 g(x) dx > \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 \int_1^2 g(x) dx > 3$$



$$h(1) = 3 - 2 \int_1^2 g(t) dt > 0 \quad \text{διότι :}$$

Η g είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της

$$g''(x) = \frac{1}{x} g(x) + (1 + \ln x)^2 g(x) > 0 \quad \text{άρα η γραφική της παράσταση βρίσκεται}$$

πάνω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Επομένω η h ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[0,1]$ άρα η εξίσωση

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x^{2020} \left(3 - 2 \int_1^2 g(t) dt \right) + (1-x) \int_0^1 h(1-t) dt = 0 \quad \text{έχει μια τουλάχιστον ρίζα}$$

στο $(0,1)$