



Θέμα Α:

A₁. Απόδειξη σελίδα 135 σχολικού βιβλίου

A₂. Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. ΑΝ

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$

Τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

Σελίδα 51 σχολικού βιβλίου

A₃. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- Έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- Για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$

Σελίδα 23 σχολικού βιβλίου

A₄. α) Σ

β) Λ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Σ

Θέμα Β:

B₁. Θέτουμε $x+1=u \Leftrightarrow x=u-1$ και έχουμε:

$$f(u) = ue^{-u+1}$$

για $u=x$ είναι: $f(x) = xe^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$

B₂. Παρατηρούμε ότι $f(0)=0$ προφανής ρίζα

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο-σύνθεση συνεχών και παραγωγίσιμων με:

$$f'(x) = (x \cdot e^{1-x})' = (x)' \cdot e^{1-x} + x \cdot e^{1-x}(1-x)' = 1 \cdot e^{1-x} - x e^{1-x} = e^{1-x}(1-x)$$

X	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'	+	+	0	-
f				

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Ο.μ.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 1 με $f(1) = 1 \cdot e^{1-1} = 1$

B₃. Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων με:



$$f'(x) = [e^{1-x}(1-x)]' = e^{1-x}(1-x)'(1-x) + e^{1-x}(1-x)' = -e^{1-x}(1-x) - e^{1-x}e^{1-x}(x-1-1) = e^{1-x}(x-2)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x} > 0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2, f''(x) > 0 \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

X	$-\infty$	1	2	$+\infty$
f''	-	-	0	+
f'	+	0	-	+
f	concave up	concave down	inflection point	concave up

H f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 2)$ και κυρτή στο διάστημα $(2, +\infty)$

H f παρουσιάζει σημείο καμπής για $x=2$ με $f(2) = 2 \cdot e^{1-2} = \frac{2}{e}$

Ασύμπτωτες

Πλάγιες:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x}$$

Θέτουμε $k=1-x \Leftrightarrow x=1-k$

$$x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow 1-k \rightarrow \infty \Leftrightarrow -k \rightarrow +\infty - 1 \Leftrightarrow k \rightarrow -\infty$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = \lim_{k \rightarrow -\infty} e^k = 0$$

Άρα δεν έχουμε πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} e^{\lambda} = +\infty$$

$$\text{Θέτουμε: } \begin{cases} 1-x = \lambda \Leftrightarrow x = 1-\lambda \\ x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow 1-\lambda \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \lambda \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Άρα δεν έχουμε οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

Οριζόντιες:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot e^{1-x}) \stackrel{**}{=} \lim_{\mu \rightarrow -\infty} [(1-\mu)e^{\mu}] = \lim_{\mu \rightarrow -\infty} \frac{1-\mu}{e^{\mu}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{\mu \rightarrow -\infty} \frac{-1}{e^{2\mu}} = \lim_{\mu \rightarrow -\infty} e^{\mu} = 0$$

$$\text{Θέτουμε } \begin{cases} 1-x = \mu \Leftrightarrow x = 1-\mu \\ x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow 1-\mu \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \mu \rightarrow -\infty \end{cases} (**)$$

Άρα ο x είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^{1-x}) \stackrel{***}{=} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} (1-\omega)e^{\omega} = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$\text{Θέτουμε } \begin{cases} \omega = 1-x \Leftrightarrow x = 1-\omega \\ x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow 1-\omega \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \omega \rightarrow +\infty \end{cases} (***)$$

B4. i. Έστω $\Delta_1 = (-\infty, 1]$

$f \uparrow$ στο Δ_1

f συνεχής στο Δ_1

$$\Leftrightarrow f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right) = (-\infty, 1]$$

Έστω $\Delta_2 = [1, +\infty)$

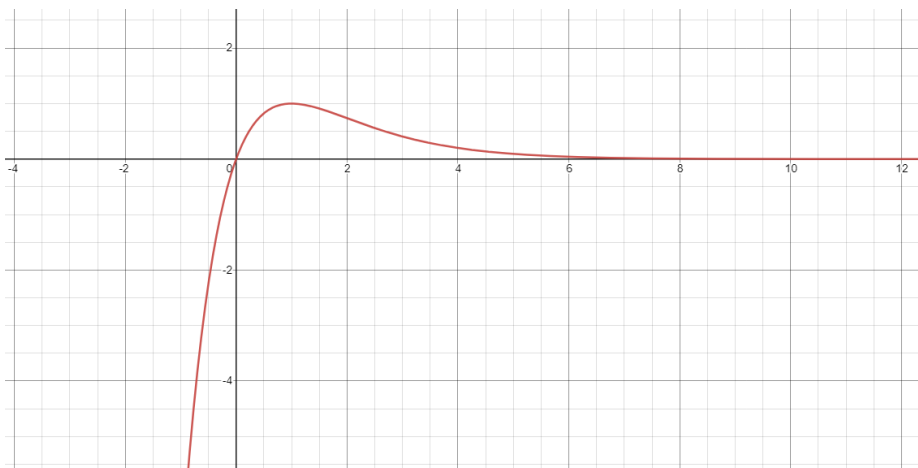
$f \downarrow$ στο Δ_2

f συνεχής στο Δ_2

$$\Leftrightarrow f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right) = (0, 1]$$

$$f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = (-\infty, 1]$$

ii.



A. Αν $\lambda > 1$ η $f(x) = \lambda$ δεν έχει ρίζα

B. Αν $\lambda = 1$ η $f(x) = \lambda$ έχει μία διπλή ρίζα

Γ. Αν $0 < \lambda < 1$, η $f(x) = \lambda$ έχει 2 διακεκριμένες ρίζες

Δ. Αν $\lambda = 0$ η $f(x) = \lambda$ έχει μία ρίζα

E. Αν $\lambda < 0$ η $f(x) = \lambda$ έχει μία ρίζα

Θέμα Γ:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 - 3x^2 - x + 1, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}, a < -3$$

$$\Gamma_1. \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^3 - 3x^2 - x + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 1 \\ f(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(ax^2 - 3x - 1)}{x} = -1 \in \mathbb{R}$$

Άρα $f'_\alpha(0) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 1}{x} = 0 \in \mathbb{R}, \text{ άρα } f'_\delta(0) = 0$$





Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Γ₂. i. Η f είναι συνεχής στο $[0, \frac{3\pi}{2}]$ ως τριγωνομετρική.

Η f παρ/μη στο $(0, \frac{3\pi}{2})$ με $f'(x) = (\sin x)' = -\eta\mu x$

$$\text{Επίσης } f(0)=1 \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(\frac{3\pi}{2}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(0) \neq f(\frac{3\pi}{2})$$

Συνεπώς δεν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle.

ii. Αν $x \in (0, \frac{3\pi}{2})$ $f'(x) = -\eta\mu x$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -\eta\mu x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu x = \eta\mu 0 \\ \eta\mu x = \eta\mu \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases}$$

άρα $\pi \in (0, \frac{3\pi}{2})$ και $f'(\pi) = -\eta\mu \pi = 0$

$$\Gamma_3. f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 - 6x - 1, & x < 0 \\ -\eta\mu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$3ax^2 - 6x - 1: \Delta = 36 + 12a = 12(3+a) < 0, \text{ άρα}$$

$$3ax^2 - 6x - 1 < 0 \text{ ομόσημο του } 3a \quad \begin{pmatrix} a < -3 \\ 3a < -9 \end{pmatrix}$$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$

x	$-\infty$	0	π	$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$

Ο.Ε.

Γ₄. Στο $(-\infty, 0)$ η f είναι συνεχής και γνησίως, άρα δεν υπάρχει $x_0 \in (-\infty, 0): f'(x)=0$

Θέμα Δ:

$$\Delta_1. \ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x \ln x = 1 \Leftrightarrow x \ln x - 1 = 0$$

Έστω $h(x) = x \ln x - 1$, $x \in (0, +\infty)$

$$\begin{cases} h(1) = \ln 1 - 1 = -1 < 0 \\ h(e) = e \ln e - 1 = e - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow h(1) \cdot h(e) < 0$$

Η $h(x)$ ως πράξεις συνεχών είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ άρα και στο $[1, e]$

Από θ. Bolzano η $h(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα x_0 στο $(1, e)$

Μοναδικότητα ρίζας

$$h'(x) = \ln x + 1 > 0 \quad \forall x \in (1, e)$$

άρα $h(x)$ γνησίως αύξουσα στο $(1, e)$ επομένως στο x_0 είναι μοναδικό.

$$\Delta_2. f(x_0) = \ln x_0(x_0 + 1) - \ln x_0 - 1, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

- Προφανής ρίζα της $f'(x)$ είναι το $x = x_0$ διότι $f'(x_0) = \ln x_0 - \frac{1}{x_0} = 0$ (από Δ_1)
- $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$
άρα $f'(x)$ αύξουσα στο $(0, +\infty)$ επομένως στο x_0 είναι μοναδική ρίζα της $f'(x)$ στο $(0, +\infty)$

πρόσημο f'

$\forall x \in A_f = (0, +\infty)$ με $x < x_0$ είναι $f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$ άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(0, x_0]$

$\forall x \in A_f = (0, +\infty)$ με $x > x_0$ είναι $f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$

Στη θέση x_0 η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f(x_0) = \ln x_0 \cdot (x_0 + 1) - \ln x_0 - 1 = x_0 \ln x_0 + \ln x_0 - \ln x_0 - 1 = x_0 \ln x_0 - 1 = 0$ (από Δ_1)

Δ_3 . Αρκεί ν.δ.ο. έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow x \cdot e^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \frac{x}{e^x} = \frac{x_0^{x+1}}{e^{x+1}} \Leftrightarrow e \cdot x = x_0^{x+1} \quad (E)$$

Επειδή $x_0 > 0$ είναι $x_0^{x+1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Για να έχει η (E) λύση πρέπει $e \cdot x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$$\forall x \in A_f = (0, +\infty) \text{ η (E) γίνεται } \ln(e \cdot x) = \ln x_0^{x+1} \Leftrightarrow \ln e + \ln x = (x + 1) \cdot \ln x_0$$

Η οποία έχει μοναδική λύση στο x_0 διότι η $f(x)$ έχει ολικό ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0) = 0$ (από Δ_2)

Στο οποίο x_0 είναι $g'(x_0) = h'(x_0)$ διότι $e^{-x_0}(1-x_0) = (x_0+1)\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}$

$$\Delta_4. \text{ Είναι } (AB) = |f(x) - \phi(x)| = \overset{f(x) > \phi(x)}{f(x)} - \phi(x)$$

Έστω $h(x) = f(x) - \phi(x)$ με $x > 0$

Έστω $h(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = x_0$ είναι $h(x) \geq h(x_0) \quad \forall x > 0$

$$\forall x > 0 \text{ είναι } f(x) - \phi(x) \geq f(x_0) - \phi(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \geq \phi(x) - \phi(x_0) \quad (1)$$

1^η περίπτωση: Η $\phi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0

$$\forall x > 0 \text{ με } x < x_0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'(x_0)$$

$$\forall x > 0 \text{ με } x > x_0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow 0 \geq \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'(x_0)$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = 0 \text{ δηλαδή } \phi'(x_0) = 0$$

Επομένως το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της $\phi(x)$

2^η περίπτωση

Αν η $\phi(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 επειδή η $\phi(x)$ είναι συνεχής και όχι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο x_0 του $A_\phi = (0, +\infty)$ το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της $\phi(x)$

Επομένως σε κάθε περίπτωση το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της $\phi(x)$.