



Θέμα Α:

A₁. Απόδειξη σελίδα 135 σχολικού βιβλίου

A₂. Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. ΑΝ

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$

Τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

Σελίδα 51 σχολικού βιβλίου

A₃. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- Έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- Για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$

Σελίδα 23 σχολικού βιβλίου

A₄. α) Σ

β) Λ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Σ

Θέμα Β:

B₁. Θέτουμε $x+1=u \Leftrightarrow x=u-1$ και έχουμε:

$$f(u) = ue^{-u+1}$$

για $u=x$ είναι: $f(x) = xe^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$

B₂. Παρατηρούμε ότι $f(0)=0$ προφανής ρίζα

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο συνεχών και παραγωγίσιμων με:

$$f'(x) = (x \cdot e^{1-x})' = (x)' \cdot e^{1-x} + x \cdot e^{1-x}(1-x)' = 1 \cdot e^{1-x} - x \cdot e^{1-x} = e^{1-x}(1-x)$$

X	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'	+	0	-	
f				

Ο.μ.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 1 με $f(1) = 1 \cdot e^{1-1} = 1$

B₃. Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων με:

$$f''(x) = [e^{1-x}(1-x)]' = e^{1-x}(1-x)'(1-x) + e^{1-x}(1-x)' = -e^{1-x}(1-x) - e^{1-x} = e^{1-x}(x-1-1) = e^{1-x}(x-2)$$

$$f'(x)=0 \stackrel{e^{1-x} \neq 0}{\iff} x-2=0 \iff x=2$$

X	$-\infty$	1	2	$+\infty$
f''		-	-	0
f'		+	-	+
f				

Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 2)$ και κυρτή στο διάστημα $(2, +\infty)$

Η f παρουσιάζει σημείο καμπής για $x=2$ με $f(2)=2 \cdot e^{1-2}=\frac{2}{e}$

Ασύμπτωτες

Πλάγιες:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x}$$

Θέτουμε $\kappa=1-x \iff x=1-\kappa$

$$x \rightarrow +\infty \iff 1-\kappa \rightarrow \infty \iff -\kappa \rightarrow +\infty - 1 \iff \kappa \rightarrow -\infty$$

$$\bullet \text{ Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = \lim_{\kappa \rightarrow -\infty} e^{\kappa} = 0$$

Άρα δεν έχουμε πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} \stackrel{*}{=} \lim_{-\infty} e^{\lambda} = +\infty$$

$$\text{Θέτουμε: } \begin{cases} 1-x=\lambda \iff x=1-\lambda \\ x \rightarrow -\infty \iff 1-\lambda \rightarrow -\infty \iff \lambda \rightarrow +\infty \end{cases}^*$$

Άρα δεν έχουμε οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

Οριζόντιες:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot e^{1-x}) \stackrel{**}{=} \lim_{\mu \rightarrow -\infty} [(1-\mu)e^{\mu}] = \lim_{\mu \rightarrow -\infty} \frac{1-\mu}{\frac{1}{e^{\mu}}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{\mu \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\frac{-1}{e^{2\mu}}} = \lim_{\mu \rightarrow -\infty} e^{\mu} = 0$$

$$\text{Θέτουμε } \begin{cases} 1-x=\mu \iff x=1-\mu \\ x \rightarrow +\infty \iff 1-\mu \rightarrow +\infty \iff \mu \rightarrow -\infty \end{cases}^{(**)}$$

Άρα ο x είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^{1-x}) \stackrel{***}{=} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} (1-\omega)e^{\omega} = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$\text{Θέτουμε } \begin{cases} \omega=1-x \iff x=1-\omega \\ x \rightarrow -\infty \iff 1-\omega \rightarrow -\infty \iff \omega \rightarrow +\infty \end{cases}^{(***)}$$

B4. i. Έστω $\Delta_1=(-\infty, 1]$

$f \uparrow$ στο Δ_1

f συνεχής στο Δ_1

$$\iff f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right) = (-\infty, 1]$$

Έστω $\Delta_2 = [1, +\infty)$

$f \downarrow$ στο Δ_2

f συνεχής στο Δ_2

$$f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = (-\infty, 1]$$

ii.



A. Αν $\lambda > 1$ η $f(x) = \lambda$ δεν έχει ρίζα

B. Αν $\lambda = 1$ η $f(x) = \lambda$ έχει μία διπλή ρίζα

Γ. Αν $0 < \lambda < 1$, η $f(x) = \lambda$ έχει 2 διακεκριμένες ρίζες

Δ. Αν $\lambda = 0$ η $f(x) = \lambda$ έχει μία ρίζα

E. Αν $\lambda < 0$ η $f(x) = \lambda$ έχει μία ρίζα

Θέμα Γ:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 - 3x^2 - x + 1, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \quad a < -3$$

$$\Gamma_1. \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^3 - 3x^2 - x + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 1 \\ f(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(ax^2 - 3x - 1)}{x} = -1 \in \mathbb{R}$$

Άρα $f'_\alpha(0) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 1}{x} = 0 \in \mathbb{R}, \text{ άρα } f'_\delta(0) = 0$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$





Γ₂. I. Η f είναι συνεχής στο $[0, \frac{3\pi}{2}]$ ως τριγωνομετρική.

Η f παρ/μη στο $(0, \frac{3\pi}{2})$ με $f'(x) = (\sin x)' = -\eta\mu x$

$$\text{Επίσης } f(0)=1 \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(\frac{3\pi}{2}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(0) \neq f(\frac{3\pi}{2})$$

Συνεπώς δεν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle.

II. Αν $x \in (0, \frac{3\pi}{2})$ $f'(x) = -\eta\mu x$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -\eta\mu x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu x = \eta\mu 0 \\ \text{ή} \\ \eta\mu x = \eta\mu \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ x = \pi \end{cases}$$

άρα $\pi \in (0, \frac{3\pi}{2})$ και $f'(\pi) = -\eta\mu \pi = 0$

$$\Gamma_3. f'(x) = \begin{cases} 3\alpha x^2 - 6x - 1, & x < 0 \\ -\eta\mu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$3\alpha x^2 - 6x - 1$: $\Delta = 36 + 12\alpha = 12(3 + \alpha) < 0$, άρα

$3\alpha x^2 - 6x - 1 < 0$ ομόσημο του 3α $\begin{pmatrix} \alpha < -3 \\ 3\alpha < -9 \end{pmatrix}$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$

x	$-\infty$	0	π	$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
	$\longleftarrow$		$\longrightarrow$	$\longrightarrow$

Ο.Ε.

Γ₄. Στο $(-\infty, 0)$ η f είναι συνεχής και γνησίως, άρα δεν υπάρχει $x_0 \in (-\infty, 0)$: $f'(x) = 0$

Θέμα Δ

Δ1) $\ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x \cdot \ln x = 1 \Leftrightarrow x \cdot \ln x - 1 = 0$

Έστω $h(x) = x \cdot \ln x - 1$, $x \in (0, +\infty)$

$$\left. \begin{aligned} h(1) &= \ln 1 - 1 = -1 < 0 \\ h(e) &= e \ln e - 1 = e - 1 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(1) \cdot h(e) < 0$$

Η $h(x)$ ως γινόμενο συνεχών είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$

αρα και στο $[1, e]$

Από το Bolzano η $h(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, e)$

Μοναδικότητα ρίζας

$$h'(x) = \ln x + 1 > 0 \quad \forall x \in (1, e)$$

Αρα $h(x) \uparrow$ στο $(1, e)$ επομένως το x_0 είναι μοναδικό.

Δ2) $f(x) = \ln x_0 \cdot (x+1) - \ln x - 1$, $x \in (0, +\infty)$

$$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

• Προφανής ρίζα της $f'(x)$ είναι το $x = x_0$, διότι

$$f'(x_0) = \ln x_0 - \frac{1}{x_0} = 0 \quad (\text{από Δ1})$$

• $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$

αρα $f'(x) \uparrow$ στο $(0, +\infty)$ επομένως το x_0 είναι μοναδική ρίζα της $f'(x)$ στο $(0, +\infty)$

Πρόσημο f'

$\forall x \in A_1 = (0, x_0)$ με $x < x_0$ είναι $f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$ αρα $f \searrow$ στο $(0, x_0)$

$\forall x \in A_2 = (x_0, +\infty)$ με $x > x_0$ είναι $f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$ αρα $f \nearrow$ στο $[x_0, +\infty)$

Θέμα Δ

Δ1) $\ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x \cdot \ln x = 1 \Leftrightarrow x \cdot \ln x - 1 = 0$

Έστω $h(x) = x \cdot \ln x - 1, x \in (0, +\infty)$

$h(1) = 1 \cdot \ln 1 - 1 = -1 < 0$

$h(e) = e \cdot \ln e - 1 = e - 1 > 0$

$\} \rightarrow h(1) \cdot h(e) < 0$

Η $h(x)$ ως πράξεις συνεχών είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$

αρα και στο $[1, e]$

Από το 1^ο Βολζανο η $h(x)$ έχει μια τοπική ρίζα στο $(1, e)$

Μοναδικότητα ρίζας

$h'(x) = \ln x + 1 > 0 \quad \forall x \in (1, e)$

Αρα $h(x) \uparrow$ στο $(1, e)$ επομένως το x_0 είναι μοναδικό.

Δ2) $f(x) = \ln x_0 \cdot (x+1) - \ln x - 1, x \in (0, +\infty)$

$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$

• Προφανής ρίζα της $f'(x)$ είναι το $x = x_0$, διότι

$f'(x_0) = \ln x_0 - \frac{1}{x_0} = 0$ (από Δ1)

• $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$

αρα $f'(x) \uparrow$ στο $(0, +\infty)$ επομένως το x_0 είναι μοναδική ρίζα της $f'(x)$ στο $(0, +\infty)$

Πρόσημο f'

$\forall x \in A_f = (0, +\infty)$ με $x < x_0$ είναι $f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$ αρα $f \searrow$ στο $(0, x_0]$

$\forall x \in A_f = (0, +\infty)$ με $x > x_0$ είναι $f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$ αρα $f \nearrow$ στο $[x_0, +\infty)$