

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

06-06-2022

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελ 186

A2. Σχολικό βιβλίο σελ 142

A3. Σχολικό βιβλίο σελ 161

A4. Σ, Σ, Σ, Λ, Λ

ΘΕΜΑ Β

$$\mathbf{B1.} A_h = \{x \in Ag / g(x) \in A_f\} = \{x \in [0, +\infty) : \sqrt{x} \in (-\infty, 1]\} [0,1]$$

$$h(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^4 - 2((\sqrt{x})^2 + 1) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2, x \in [0,1]$$

B2. Η h συνεχής στο $[0,1]$ ως σύνθεση συνεχών. Η h παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων με $h'(x) = 2 \cdot (x - 1) < 0$, άρα $h(x) \downarrow$ στο $[0,1]$,

Άρα “1-1”, άρα αντιστρέφεται.

$$\psi = h(x)$$

$$\psi = (x - 1)^2, \psi \geq 0$$

$$\sqrt{\psi} = \sqrt{(x - 1)^2}$$

$$\sqrt{\psi} = |x - 1|, x - 1 < 0$$

$$\sqrt{\psi} = 1 - x$$

$$x = 1 - \sqrt{\psi}$$

Εξετάζουμε για ποιες τιμές του $y \geq 0$ το $x = 1 - \sqrt{y} \in A_h = [0,1]$

$$\text{Είναι } 0 \leq 1 - \sqrt{y} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\sqrt{y} \leq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \sqrt{y} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq \sqrt{y} \\ \sqrt{y} \geq 0 \end{cases} \text{ και } \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq y \text{ και} \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow y \in [0,1]$$

Άρα $\forall y \in [0,1]$ το $x = 1 - \sqrt{y} \in A_h = [0,1]$

Επομένως $h(A) = [0,1]$ άρα $A_{h^{-1}} = [0,1]$



Άρα $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, x \in [0,1]$

B3. $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$

i) Εξετάζουμε την συνέχεια $\phi(x)$ στο $[0,1]$

α) $\forall x \in [0,1)$ η $\varphi(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$ ως πράξεις συνεχώς είναι συνεχής.

β) $x_0 = 1$ είναι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2} = f(1)$

$\varphi(x)$ συνεχής στο $[0,1]$

$\varphi(0) = \frac{1}{1} = 1$

$\varphi(1) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \varphi(0) \neq \varphi(1)$ και η $\varphi \nmid$ στο $[0,1]$

Άρα για την $\phi(x)$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Ε.Τ. στο $[0,1]$

ii) 1^{ος} τρόπος:

Επειδή είναι $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \eta\mu \frac{\pi}{6} < \eta\mu \alpha < \eta\mu \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu \alpha < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(1) < \eta\mu \alpha < \varphi(0)$

Από Θ.Ε.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$: $\varphi(x_0) = \eta\mu \alpha$

2^{ος} τρόπος:

Θεωρούμε συνάρτηση $K(x) = \varphi(x) - \eta\mu \alpha, x \in [0,1]$

$K(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} - \eta\mu \alpha, x \in [0,1)$

$K(0) = 1 - \eta\mu \alpha > 0$ διότι:

$K(1) = \varphi(1) - \eta\mu \alpha = \frac{1}{2} - \eta\mu \alpha < 0$

Η $K(x)$ συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών. Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$: $K(x_0) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x_0) - \eta\mu \alpha = 0 \Leftrightarrow \varphi(x_0) = \eta\mu \alpha$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(0) = 0$

Έστω $\Delta_1 = (-\infty, -1)$ και $\Delta_2 = (-1, +\infty)$

$\forall x \in \Delta_1$ είναι $f'(x) = -2 \Leftrightarrow [f(x)]' = (-2x)' \Leftrightarrow f(x) = -2x + C_1$



$$\forall x \in \Delta_2 \text{ είναι } f'(x) = 3x^2 - 1 \Leftrightarrow [f(x)]' = [x^3 - x]' \Leftrightarrow f(x) = x^3 - x + C_2$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } f(0) = C_2 \Leftrightarrow 0 = C_2 \text{ Άρα } f(x) = x^3 - x \text{ για κάθε } x \in \Delta_2$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} -2x + C_1, & x \in (-\infty, -1) \\ x^3 - x, & x \in (-1, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Επειδή } f \text{ συνεχής στο } -1 \text{ είναι } f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \Leftrightarrow$$

$$f(-1) = 2 + C_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) = 0 \\ 2 + C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = -2 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x \in (-1, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Γ2. Είναι } (\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ με } x_0 > -1$$

$$y - (x_0^3 - x_0) = (3x_0^2 - 1) \cdot (x - x_0)$$

$$A(0, -2) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow -2 - (x_0^3 - x_0) = (3x_0^2 - 1) \cdot (0 - x_0) \Leftrightarrow$$

$$-2 - x_0^3 + x_0 = -3x_0^3 + x_0 \Leftrightarrow 2x_0^3 = 2 \Leftrightarrow x_0^3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

$$\text{Άρα } (\varepsilon): y = 2 \cdot (x - 1)$$

$$\text{Γ3. (ΜΚΓ)} = \frac{1}{2} (ΚΓ) \cdot (ΜΚ)$$

$$E(t) = \frac{1}{2} (x(t) - 2) \cdot \psi(t)$$

$$E(t) = \frac{1}{2} (x(t) - 2) \cdot (2x(t) - 2)$$

$$E(t) = (x(t) - 2) \cdot (x(t) - 1)$$

$$E(t) = (x(t) - 2)' \cdot (x(t) - 1) + (x(t) - 1)' \cdot (x(t) - 2)$$

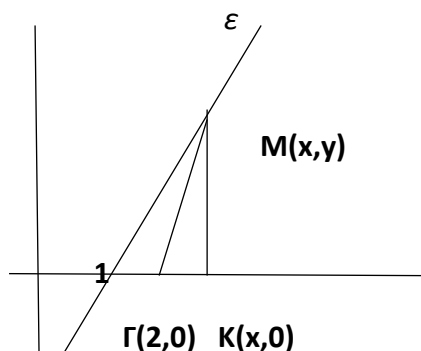
$$E(t) = x'(t) \cdot (x(t) - 1) + x'(t) \cdot (x(t) - 2)$$

$$E(t) = x'(t) \cdot [x(t) - 1 + x(t) - 2]$$

$$E(t) = x'(t) \cdot [2x(t) - 3]$$

$$\text{Για } t = t_0: E'(t_0) = x'(t_0) \cdot [2x(t_0) - 3]$$

$$E'(t_0) = 2 \text{ } \tau\mu / \text{sec} \cdot [2 \cdot 3 - 3] = 2 \cdot 3\tau\mu / \text{sec} = 6 \tau\mu / \text{sec}$$



$$\Gamma 4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 2) = +\infty$$

$$\left| \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \right| = \frac{|\eta\mu f(x)|}{|f(x)|} \leq \frac{1}{|f(x)|} = \frac{1}{f(x)}$$

$$\left| \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \right| \leq \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \leq \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \leq \frac{1}{f(x)}$$

$$\stackrel{ΚΠ}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3+x}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{-x^3} = 1$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right] = 0 + 1 = 1$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1.1) f(x) = x - \ln(3x), \quad x \in (0, +\infty)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{3x} \cdot (3x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

x	0	1	$+\infty$
f'(x)		0	+
f(x)	$+\infty$		

ο.ε. $1 - \ln 3$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x - \ln(3x)] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(3x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \left(1 - \frac{\ln(3x)}{x} \right) \right] = +\infty, \text{ διότι}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x) + \infty}{x + \infty} \stackrel{D.L.H.}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(3x)]'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln(3x)}{x}\right) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

Έστω $\Delta_1 = (0,1]$ και $\Delta_2 = [1, +\infty)$

Επειδή f συνεχής και $\downarrow$ στο Δ_1 είναι $f(\Delta_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)\right) = [1 - \ln 3, +\infty)$

Επειδή f συνεχής και $\uparrow$ στο Δ_2 είναι $f(\Delta_2) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) = [1 - \ln 3, +\infty)$

Επειδή $0 \in f(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0,1): f(x_1) = 0$

Επειδή $0 \in f(\Delta_2)$ υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (1, +\infty): f(x_2) = 0$

II) Είναι $f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)' = 0 - \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x^2} > 0$. Άρα $f(x)$ κυρτή στο $(0, +\infty)$

$$\begin{aligned}
 \Delta 2. E &= \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx = \int_{x_1}^{x_2} -f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} [\ln(3x) - x] dx = \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \ln(3x) dx - \int_{x_1}^{x_2} x dx = \int_{x_1}^{x_2} (x)' \cdot \ln(3x) dx - \int_{x_1}^{x_2} x dx = \\
 &= [x \ln(3x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x \cdot [\ln(3x)]' dx - \frac{1}{2} [x_2^2 - x_1^2] \\
 &= [x \ln(3x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \frac{1}{x} dx - \int_{x_1}^{x_2} x dx = [x \ln(3x)]_{x_1}^{x_2} - [x]_{x_1}^{x_2} - \frac{1}{2} [x^2]_{x_1}^{x_2} = \\
 &= x_2 \cdot \ln(3x_2) - x_1 \cdot \ln(3x_1) - (x_2 - x_1) - \frac{1}{2} (x_2^2 - x_1^2) = \\
 &= x_2 \cdot \ln(3x_2) - x_1 \cdot \ln(3x_1) - (x_2 - x_1) - \frac{1}{2} (x_2 - x_1) \cdot (x_2 + x_1) \quad (1) \\
 \text{Επειδή } f(x_1) = 0 \text{ είναι } x_1 - \ln(3x_1) = 0 &\Leftrightarrow \ln(3x_1) = x_1 \\
 f(x_2) = 0 \text{ είναι } x_2 - \ln(3x_2) = 0 &\Leftrightarrow \ln(3x_2) = x_2 \\
 \text{Η (1) γίνεται } E &= x_2 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_1 - (x_2 - x_1) - \frac{1}{2} (x_2 - x_1) \cdot (x_2 + x_1) = \\
 &= x_2^2 - x_1^2 - (x_2 - x_1) - \frac{1}{2} (x_2 - x_1) \cdot (x_2 + x_1) = \\
 &= (x_2 - x_1) \cdot (x_2 + x_1) - (x_2 - x_1) - \frac{1}{2} (x_2 - x_1) \cdot (x_2 + x_1) = \\
 &= (x_2 - x_1) \cdot \left[x_2 + x_1 - 1 - \frac{1}{2} (x_2 + x_1) \right] = \\
 &= (x_2 - x_1) \cdot \left[x_2 + x_1 - 1 - \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_1 \right] = (x_2 - x_1) \cdot \left(\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 - 1 \right) =
 \end{aligned}$$



$$= (x_2 - x_1) \cdot \frac{1}{2} (x_1 + x_2 - 2) = \frac{1}{2} (x_2 - x_1) \cdot (x_1 + x_2 - 2).$$

Δ3. Από Δ2 είναι $E > 0$ άρα $x_1 + x_2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 > 2$ (2)

Αρκεί να δειχτεί ότι $f(2 - x_1) < 0 \Leftrightarrow f(2 - x_1) < f(x_2) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} 2 - x_1 < x_2$

στο $(1, +\infty)$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 > 2$ που ισχύει από (2)

Δ4. Επειδή η $f(x)$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη (ϵ) της f στο $x_0 = x_2$, δηλαδή της (ϵ) : $y - f(x_2) = f'(x_2) \cdot (x - x_2) \Leftrightarrow$

$$y - 0 = f'(x_2) \cdot (x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2) \cdot (x - x_2)$$

Άρα $f(x) \geq y_\epsilon$ δηλ $f(x) \geq f'(x_2) \cdot (x - x_2)$ (3) με το "=" να ισχύει μόνο όταν $x = x_2$

Επειδή το $f(1) = 1 - \ln 3$ είναι ολικό ελάχιστο της $f(x)$ στο $(0, +\infty)$

Είναι $f(x) \geq 1 - \ln 3$ (4) με το "=" να ισχύει μόνο όταν $x = 1$

Προσθέτουμε τις (3) και (4) κατά μέλη και έχουμε:

$$2f(x) > 1 - \ln 3 + f'(x_2) \cdot (x - x_2).$$

Άρα η εξίσωση δεν έχει λύση.